

LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 3: LÓGICA PROPOSICIONAL

DEDUCCIÓN NATURAL

Ejercicio 1:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra:

1. $(\varphi \wedge \varphi) \vdash \varphi$ (idempotencia 1)
2. $\varphi \vdash (\varphi \wedge \varphi)$ (idempotencia 2)
3. $\{(\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi)\} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ (introducción de la coimplicación)
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ (eliminación de la coimplicación 1)
5. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$ (eliminación de la coimplicación 2)

Ejercicio 2:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:

1. $\{(p \wedge q), r\} \vdash (q \vee r)$
2. $\{(\neg p \wedge q), ((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p))\} \vdash (r \vee \neg p)$
3. $\{p, \neg\neg(q \wedge r)\} \vdash (\neg\neg p \wedge r)$
4. $\{p, (p \rightarrow q), (p \rightarrow (q \rightarrow r))\} \vdash r$
5. $\{(p \rightarrow (q \rightarrow r)), p, \neg r\} \vdash \neg q$
6. $\{(p \wedge q)\} \vdash (p \wedge (q \vee r))$
7. $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \vdash (p \rightarrow r)$
8. $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow r), (r \rightarrow s)\} \vdash (p \rightarrow s)$
9. $\{(p \rightarrow \neg q), (r \rightarrow q)\} \vdash \neg(p \wedge r)$
10. $\{\neg p\} \vdash (p \rightarrow q)$
11. $\{(p \rightarrow q)\} \vdash (\neg p \vee q)$

Ejercicio 3:

Formaliza los siguientes razonamientos:

1. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.
2. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podría ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$, no es diferenciable en $[a, b]$.

Ejercicio 4:

Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.

Ejercicio 5:

Resolver utilizando el Teorema de la deducción:

1. $\vdash ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
2. $\vdash ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$
3. $\vdash (((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

Ejercicio 6:

Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de Deducción Natural:

1. $\neg\neg p \equiv p$
2. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
3. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
4. $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
5. $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$

Ejercicio 7:

Probar $\{(p \rightarrow (\neg q \vee r))\} \models (q \rightarrow \neg(p \wedge \neg r))$:

1. Semánticamente, con el concepto de consecuencia lógica.
2. Construyendo una demostración con las reglas del cálculo de Deducción Natural y justificando el resultado con el teorema de la Corrección.