LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2024

PRÁCTICO 5: LÓGICA DE PREDICADOS

Segunda Parte

Ejercicio 1:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, P^{(2)}, c \rangle$ consta de dos símbolos de función f_1, f_2, un símbolo de predicado P, y un símbolo de constante c. Decidir si las siguientes estructuras son adecuadas para ese vocabulario σ, donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, y los símbolos $+, \leq, \geq, =$ representan las operaciones matemáticas habituales. Justifique en cada caso su respuesta.

1. $\langle \mathbb{N}, f, +, \leq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x^2$.
2. $\langle \mathbb{N}, f, +, \geq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x - 1$.
3. $\langle \mathbb{N}, f, +, \leq, 2 \rangle$ donde $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $\langle \mathbb{N}, +, f, \geq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x^2$.
5. $\langle \mathbb{N}, f, +, =, 2 \rangle$ donde $f(x) = 1$.

Ejercicio 2:

Sea L_σ un lenguaje de primer orden con *igualdad*, cuyo vocabulario $\sigma = \langle E^{(2)} \rangle$, con E un símbolo de predicado que significa "*hay un vuelo que me lleva de x a y*" y la estructura $\mathcal{A} = \langle X, E \rangle$. Donde $X = \{$Roma, París, New York, Pequín$\}$ y $E = \{$(Roma,París),(Roma,New York),(New York,París), (Pequín,Roma),(Pequín,París)$\}$.

a) Expresar en lenguaje natural las siguientes fórmulas

1. $(\exists x\ (E(x, y) \land \neg\, E(y, x)))$
2. $(\forall x\ E(x, y))$
3. $\neg(\exists x\ (E(x, x) \land E(y, x)))$
4. $(\exists y\ (E(x, y) \to (E(x, z) \land \neg = (y, z))))$
5. $\neg(\forall x\ (\forall y\ (E(x, y) \lor E(y, x))))$

b) Decidir si alguna de ellas se satisfacen en $\mathcal{A}$.

Ejercicio 3:

Sea L_σ un lenguaje de primer orden cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, P^{(2)}, c \rangle$ consta de dos símbolos de función f_1, f_2, un símbolo de predicado P, y un símbolo de constante c y la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \bullet, +, =, 0 \rangle$. Donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros, y los símbolos $+, \bullet, =, 0$ representan lo mismo que sus correlativos matemáticos.

a) Expresar en lenguaje natural las siguientes fórmulas

1. $((\exists x\ P(f_1(x, u), y)) \land (\exists v\ P(f_2(x, v), z)))$
2. $(\forall x\ (\forall y\ (P(x, y) \lor (\exists z\ P(f_2(x, z), y)))))$

3. $(\exists z\ (\neg P(z,c) \wedge P(f_2(x,z),y)))$
4. $(\exists y\ P(x, f_2(y,y)))$
5. $(\forall x\ (P(f_2(x,c),x)))$
6. $(\forall x\ (P(f_1(x,c),c)))$

b) Decidir si alguna de las fórmulas anteriores se satisfacen en $\mathcal{A}$ asumiendo, cuando sea necesario, $\beta(x) = 3, \beta(y) = 7, \beta(z) = 4, \beta(u) = 10, \beta(v) = 5$.

c) Alguna de las fórmulas anteriores cambian su valor de verdad si se cambia la función de asignación β? En caso de responder afirmativamente mostrarlo dando la β que corresponda en cada caso.

Ejercicio 4:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a\rangle$, consta de dos símbolos de función f y g, dos símbolos de predicado P y Q y un símbolo de constante a. Si consideramos la siguiente interpretación $\mathcal{I}$, cuyo dominio $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto de los números naturales unión $\{0\}$ y la interpretación del vocabulario no lógico es:

$$\begin{array}{rcl}
a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\
f^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0,\ \text{donde } f^{\mathcal{I}}(x) = x+1 \\
g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0,\ \text{donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = x+y \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0,\ \text{donde } P^{\mathcal{I}} = \{x / x \in \mathbb{N}_0 \wedge \text{“}x \text{ es par”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge \text{“}x \text{ es mayor que } y\text{”}\}
\end{array}$$

(a) Obtener, si es posible, el número natural denotado por cada uno de los siguientes términos:

1. $f(f(a))$
2. $g(a,a)$
3. $g(f(a),x)$
4. $f(g(f(a),f(f(a))))$
5. $f(g(g(x,f(z)),f(y)))$
6. $g(g(f(a),f(a)),g(f(a),f(f(a))))$

(b) Determinar si cada una de las siguientes fórmulas atómicas se satisface en $\mathcal{I}$.

1. $P(f(g(a,a)))$
2. $Q(a,f(a))$
3. $P(f(g(a,f(a))))$
4. $Q(f(a),a)$

(c) Determinar los valores de x para los cuales cada una de las siguientes fórmulas se satisface en $\mathcal{I}$.

1. $Q(f(f(a)),x)$
2. $P(g(f(a),x))$
3. $Q(x,f(x))$
4. $Q(f(f(x)),g(f(a),x))$
5. $Q(f(x),g(x,x))$

(d) Determinar si cada uno de los siguientes enunciados se satisfacen en $\mathcal{I}$:

1. $(\forall x\ P(g(x,x)))$
2. $(\exists x\ Q(f(x),g(x,x)))$
3. $(\forall x(\exists y\ Q(y,x)))$
4. $(\forall x(\forall y(=(f(x),f(y))\rightarrow=(x,y))))$
5. $(\exists y(\forall x\ Q(y,x)))$
6. $(\exists x(P(x)\wedge P(f(x))))$
7. $(\forall x(P(x)\rightarrow P(f(f(x)))))$
8. $(\exists x(\forall y\ Q(f(y),g(x,y))))$

Ejercicio 5:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma=\langle f_1^{(2)},P^{(2)},Q^{(2)},R^{(1)},c_1,c_2\rangle$ consta de un símbolo de función f_1, tres símbolos de predicado, P, Q y R, y dos símbolos de constantes c_1 y c_2. Sea la estructura $\mathcal{A}=\langle\mathbb{N},+,<,=,\mathsf{A},3,10\rangle$, con $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, los símbolos se corresponden con los matemáticos y $\mathsf{A}(x)$ se interpreta como " x pertenece a A" y $\mathsf{A}=\{1,2,3,4,5\}$. Determinar el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes:

1. $(\exists x\ (\mathsf{A}(x)\ \wedge\ =(+(x,3),10)))$
2. $(\forall x\ (\mathsf{A}(x)\ \rightarrow\ <(+(x,3),10)))$
3. $(\forall x\ (\mathsf{A}(x)\ \wedge\ <(+(x,3),10)))$
4. $(\exists x\ =(+(+(x,y),3),10))$

Ejercicio 6:

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad L_σ cuyo vocabulario $\sigma=\langle P^{(2)},R^{(1)},c\rangle$ consta de dos símbolos de predicado, P y R, y un símbolo de constante c. Sea la estructura $\mathcal{A}=\langle\mathbb{B},Sobre,SoMe,a\rangle$, con $\mathbb{B}$ el universo de bloques (cada bloque es individualizado por medio de una letra minúscula), $Sobre(x,y)$ se satisface cuando "el bloque x está sobre el bloque y", $SoMe(x)$ equivale a decir que "el bloque x está apoyado sobre la mesa", y la constante c se corresponde con el bloque a. Determinar el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes si la definición por extensión de $Sobre$ y $SoMe$ corresponde a lo mostrado de la figura 1.

1. $SoMe(a)$
2. $(\forall x\ SoMe(x))$
3. $(\exists x\ (SoMe(x)\wedge(\exists y\ Sobre(y,x))))$
4. $(\forall x\ Sobre(x,a)))$
5. $(\forall x(\exists y\ Sobre(x.y)))$
6. $(\exists x\ Sobre(a,x))$
7. $(\forall x(SoMe(x)\rightarrow(\exists y(Sobre(y,x)\rightarrow\neg SoMe(y)))))$

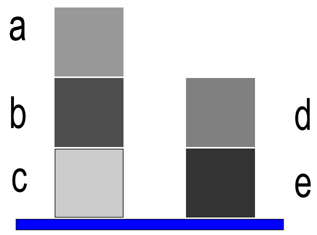


Figura 1: Definición de $Sobre(x)$ y $SoMe(x)$

Ejercicio 7:

Sea L_σ el lenguaje de primer orden del **Ejercicio 1**, y sea $\mathcal{A}$ la siguiente estructura adecuada: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f, +, =, 0 \rangle$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros y $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la función definida por $f(x) = x + 1$, y los demás símbolos se corresponden con los matemáticos.

Sea $\beta : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ la siguiente asignación: $\beta(x_i) = 2 \times i$.

Interpretar las siguientes expresiones:

1. $f_1(f_2(x_1, x_2))$
2. $f_2(f_1(x_1), f_1(x_3))$
3. $(\forall x_1 (\exists x_2\ P(x_1, x_2)))$
4. $f_1(f_2(f_1(x_3), x_5))$
5. $P(f_1(f_1(x_1)), c)$
6. $(\exists x_1\ P(f_1(x_1), f_2(x_1, x_2)))$
7. $P(f_2(f_1(f_1(c)), x_9), f_1(f_1(x_9)))$

Ejercicio 8:

Sea la siguiente fórmula de un lenguaje primer orden L_σ con vocabulario adecuado.

$$(\forall x_1\ A(x_1) \to A(f_1(x_1)))$$

¿Existe una interpretación en la que dicha fórmula se interprete como un enunciado falso? Si su respuesta es afirmativa, describir tal interpretación en detalle. En otro caso explicar porqué no es posible encontrar una.

Ejercicio 9:

Sea el lenguaje con igualdad L_σ con vocabulario $\sigma = \langle f, \leq, 0 \rangle$, y sean las siguientes σ-estructuras $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, f^{\mathcal{R}}, \leq^{\mathcal{R}}, 0^{\mathcal{R}} \rangle$ y $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}} \rangle$, donde $\mathbb{R}$ son los números reales y $\mathbb{Z}$ los números enteros. Dar un solo enunciado $\varphi \in L_\sigma$ tal que:

- En $\mathcal{R}$, φ se satisface.
- En $\mathcal{Z}$, φ no se satisface.

Ejercicio 10:

Sea L_σ un lenguaje con vocabulario $\sigma = \langle \leq^{(2)} \rangle$ (con igualdad) y dadas $\mathcal{A}_1 = \langle \{a_1, \ldots, a_6\}, \leq^{\mathcal{A}_1} \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle \{a_1, \ldots, a_6\}, \leq^{\mathcal{A}_2} \rangle$. Sabiendo además que:

$\leq^{\mathcal{A}_1} = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_6), (a_5, a_6)\}$

$\leq^{\mathcal{A}_2} = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5), (a_2, a_5), (a_3, a_4), (a_4, a_6), (a_5, a_6)\}$

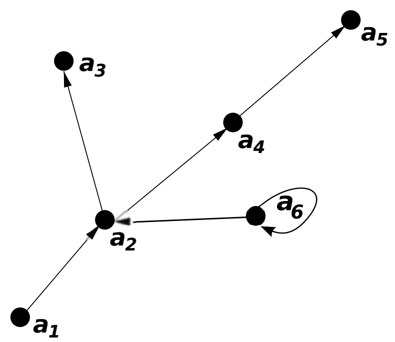
Dar un enunciado φ, tal que:

- $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{A}_2 \not\models \varphi$.
- $\mathcal{A}_1 \not\models \varphi$ y $\mathcal{A}_2 \models \varphi$.

Ejercicio 11:

Considere el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{A}$. Encontrar una fórmula de primer orden que *"identifique"* [1] a cada uno de los elementos $a_i : \varphi_i(x)$ en un lenguaje con igualdad L_σ con vocabulario $\sigma = \langle \leq^{(2)} \rangle$, es decir tal que:

$$\mathcal{A} \models_\beta \varphi_i(x) \text{ si y sólo si } \beta(x) = a_i.$$



Ejercicio 12:

Sea el lenguaje L_σ y la interpretación del mismo definidos en el **Ejercicio 6**, caracterice cada uno de los bloques del universo, de forma tal que cada bloque satisfaga sólo una fórmula, es decir: $\varphi_a(x)$ se satisface sólo si $\beta(x) = a$, lo mismo para $\varphi_b(x)$ cuando $\beta(x) = b$, y así para cada bloque.

Ejercicio 13:

a) Escribir enunciados que describan las siguientes propiedades de relaciones con dominios coincidentes: reflexiva, simétrica, transitiva, antirreflexiva, antisimétrica y débilmente antisimétrica. Aclare el vocabulario y el universo sobre el que trabaja.

b) Exprese las siguientes propiedades de relaciones con dominios no necesariamente coincidentes por medio de enunciados: función, total, inyectiva y sobreyectiva. Aclare el vocabulario y el universo sobre el que trabaja.

c) Defina un vocabulario, que incluya los predicados A, B y C, y un universo que le permitan expresar los siguientes enunciados: $A \subseteq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \subset B$, $A - B = C$.

d) Para cada uno de los enunciados de las partes a), b) y c) obtener una interpretación en que se satisfaga y otra en la que no.

Ejercicio 14:

Sea el lenguaje con igualdad L_σ definido en el **ejercicio 6**, escribir enunciados que expresen las siguientes relaciones:

[1] Que identifique a un a_i significa que la fórmula que se escriba debe tener una variable libre y *sólo* se satisface cuando el valor de esa variable es a_i. En este caso debe escribir 6 fórmulas.

- $Bajo(x, y)$: se satisface cuando el bloque x está debajo del bloque y.
- $Libre(x)$: se verifica cuando el bloque x no tiene ningún bloque sobre él.
- $Pila(x, y, z)$: se satisface cuando el bloque x está sobre el bloque y, el bloque y se encuentra sobre el bloque z y el el bloque z está sobre la mesa.

Ejercicio 15

Sea L_σ definido en el **ejercicio anterior**, expresar las siguientes frases en L_σ, utilizando, si lo necesita, lo anteriormente definido.

1. ¿Hay bloques libres?
2. El bloque central de cualquier pila no está libre.
3. Defina una pila en la cual el bloque z no esté sobre la mesa.
4. ¿Cuáles son los bloques que participan de una pila?
5. Hay exactamente dos bloques libres.
6. Devolver los bloques que estén en medio de una pila.
7. Hay un bloque sobre la mesa y está libre.
8. Sólo hay un bloque sobre la mesa y no está libre.
9. El bloque de arriba de una pila está bajo otro bloque.

Ejercicio 16:

Sea L_σ un lenguaje con igualdad con vocabulario $\sigma = \langle G^{(1)}, E^{(4)}, \leq^{(2)}, c_1, c_2 \rangle$, donde G, E y $\leq$ son símbolos de relación, y c_1 y c_2 son símbolos de constantes.

Sea $\mathcal{A} = \langle D, G^D, E^D, \leq^D, c_1^D, c_2^D \rangle$ una σ–estructura.

Sea D el dominio de la σ–estructura.

Sea G^D el conjunto de ciudades, con $G^D \subseteq D$.

$E^D = \{(x, y, z, w) // x, y \in G^D \wedge$"existe un vuelo directo desde x a y con costo z en la aerolínea w"$\}$, con $E^D \subseteq D \times D \times D \times D$.

$\leq^D$ es la relación "menor o igual" definida sobre los elementos del dominio de la estructura (Orden total y dicotómica).

Sean c_1^D y c_2^D interpretadas con elementos de $G^D \subseteq D$.

Expresar los siguientes enunciados o propiedades en L_σ:

1. Todas las ciudades tienen acceso a otra ciudad por algún vuelo directo.
2. Si una ciudad tiene vuelo directo a otra ciudad, entonces con una aerolínea desde esa ciudad se puede acceder a la primera haciendo escala en una ciudad intermedia.
3. Siempre hay una forma de llegar de una ciudad a otra pasando por dos ciudades alternativas distintas con una aerolínea.
4. Siempre existe una ciudad que accede a todas las demás ciudades por vuelo directo.
5. Todas las ciudades tienen vuelos bautismos. Estos son paseos que sobrevuelan la ciudad.

6. Si una ciudad tiene vuelo a otra ciudad con una escala intermedia, entonces desde la ciudad destino se puede acceder a la primera por vuelo directo.
7. Siempre hay una ciudad que partiendo de ella se llega a ella misma, con una escala, por dos ciudades alternativas.

Ejercicio 17

Sea la σ–estructura $\mathcal{A}$ definida en el **ejercicio anterior**, expresar las siguientes consultas en lógica de predicados de primer orden (FO):

1. ¿Cuáles son las ciudades aisladas?
2. ¿Existen ciudades aisladas?
3. Dar las ciudades de las que parten vuelos pero que ninguno llega a ellas.
4. Dadas dos ciudades c_1^D y c_2^D, dar la/s aerolínea/s con el costo de vuelo directo más barato desde c_1^D a c_2^D.
5. Dadas dos ciudades c_1^D y c_2^D, dar la/s aerolínea/s con el costo de vuelo directo más caro desde c_1^D a c_2^D.
6. Para cada aerolínea indicar entre qué ciudades no tiene vuelos directos.
7. Pares de ciudades que tengan acceso entre ellas por medio de vuelos con una escala.
8. Pares de ciudades que no estén conectadas o si lo están existen por lo menos 4 escalas entre ellas.
9. ¿Para todos los pares de ciudades posibles existe una conexión con exactamente 4 escalas?

Ejercicio 18

Para las consultas del ejercicio anterior se pide:

a) Decir cuáles son enunciados y cuáles no.

b) Dar para cada una de las consultas, usando la σ–estructura $\mathcal{A}$ definida en el **ejercicio 3**, una instancia para el dominio D y para G^D, E^D, c_1^D y c_2^D de modo tal que se satisfaga y mostrar la respuesta obtenida.