LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 7: APLICACIONES DE LA LÓGICA

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Nota: Ver ***Apendice*** para recordar conceptos de conjuntos, relaciones y funciones necesarios realizar algunas demostraciones.

Ejercicio 1:

En los siguientes ejercicios a, b, c y n son números enteros. Demuestre:

1. Si n es impar entonces n^3 es impar.
2. Si a es impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es impar.
3. Si a, b son pares, entonces ab es par.
4. Si a, b son impares, entonces ab es impar.
5. Si n es un número entero, entonces $n^2 + 3n + 4$ es par.
6. n^2 es impar si y solo sí n es impar.
7. Si a no divide a bc, entonces a no divide ab.
8. Si 4 no divide a a^2; entonces a es impar.

Ejercicio 2:

En los siguientes ejercicios demuestre que la proposición es falsa:

1. Si n es un número natural, entonces $2n^2 - 4n + 31$ es primo.
2. Si n es un número natural, entonces $n^2 + 17n + 17$ es primo.
3. Si $n^2 - n$ es par, entonces n es par.

Ejercicio 3:

Demuestre por Inducción Matemática:

1. Si n es un número natural, entonces
   $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n^2+n}{2}$
2. Si n es un número natural, entonces
   $1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Si n es un número natural, entonces
   $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

Ejercicio 4:

Sean S y R relaciones definidas sobre $A \times B$ (R y $S \subseteq A \times B$). Demostrar que:

1. $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

3. $R \subseteq S \Leftrightarrow \overline{S} \subseteq \overline{R}$

Ejercicio 5:
Demostrar que la relación "$\subseteq$" entre conjuntos es un orden parcial.

Ejercicio 6:
Sea R una relación sobre X, tal que: a) $Dom(R)= X$ y b) R es simétrica y transitiva.
Muestre que R es una relación de equivalencia

Ejercicio 7:
Dadas las siguientes definiciones:

- $R \subseteq X \times X$
- $R^2 = R \circ R$
- $\mathcal{X} = X \times X$

Demostrar que:

1. R es transitiva y reflexiva $\Rightarrow R^{\,2} = R$.
2. R es un orden parcial $\Rightarrow R^{-1}$ es un orden parcial.
3. R es un orden parcial $\Rightarrow R^{\,2}$ es un orden parcial.
4. $R^2 \subseteq R \Rightarrow R$ es transitiva.

Ejercicio 8:
¿Es la unión de funciones una función? ¿Es la intersección de funciones una función? Si su respuesta es afirmativa demuéstrelo, caso contrario dé un contraejemplo.

Ejercicio 9:
Demostrar el siguiente teorema:
Sea f una función total de A en B, $f : A \longmapsto B$:

a) $\mid Ran(f) \mid \leq \mid A \mid$

b) Si f es inyectiva entonces $\mid A \mid \leq \mid B \mid$

c) Si f es sobreyectiva entonces $\mid B \mid \leq \mid A \mid$

d) Si f es biyectiva entonces $\mid A \mid = \mid B \mid$

e) Si $\mid A \mid = \mid B \mid$ entonces f es sobreyectiva si y sólo si f es inyectiva.