

LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

PRÁCTICO 3: LÓGICA PROPOSICIONAL

DEDUCCIÓN NATURAL

RESOLUCIÓN

Ejercicio 2: Pruebe que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de DN (debe demostrar para ambos lados de la equivalencia):

1. $\neg\neg p \equiv p$

- $\neg\neg p \vdash p$

1) $\neg\neg p$ Premisa
 2) $\vdash p$ E \neg (1)

- $p \vdash \neg\neg p$

| | |
|------------------------|------------------|
| 1) p | Premisa |
| 2) $\neg\neg\neg p$ | Premisa Auxiliar |
| 3) $\neg p$ | E \neg (2) |
| 4) $(p \wedge \neg p)$ | I \wedge (1,3) |
| 5) $\vdash \neg\neg p$ | PBC (2,4) |

2. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

- $\neg(p \vee q) \vdash (\neg p \wedge \neg q)$

| | | | |
|-----------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|-------------------|
| 1) $\neg(p \vee q)$ | Premisa | 7) q | Premisa Auxiliar |
| 2) p | Premisa Auxiliar | 8) $(p \vee q)$ | I \vee (7) |
| 3) $(p \vee q)$ | I \vee (2) | 9) $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ | I \wedge (1,8) |
| 4) $p \rightarrow (p \vee q)$ | I \rightarrow (2,3) | 10) $\neg q$ | I \neg (7,9) |
| 5) $p \rightarrow \neg(p \vee q)$ | I \rightarrow (2,1) | 11) $(\neg p \wedge \neg q)$ | I \wedge (6,10) |
| 6) $\neg p$ | I \neg (1,4,5) | | |

- $(\neg p \wedge \neg q) \vdash \neg(p \vee q)$

1) $(\neg p \wedge \neg q)$ Premisa

2) $(p \vee q)$ Premisa Auxiliar

| | |
|--|---|
| 3) p Premisa Auxiliar | 8) q Premisa Auxiliar |
| 4) $\neg p$ $E\wedge$ (1) | 9) $\neg q$ $E\wedge$ (1) |
| 5) $(p \vee q) \rightarrow p$ $I \rightarrow$ (2,3) | 10) $(p \vee q) \rightarrow q$ $I \rightarrow$ (2,8) |
| 6) $(p \vee q) \rightarrow \neg p$ $I \rightarrow$ (2,4) | 11) $(p \vee q) \rightarrow \neg q$ $I \rightarrow$ (2,9) |

7) $\neg(p \vee q)$ $I \neg$ (5,6)

12) $\neg(p \vee q)$ $I \neg$ (5,6)

13) $\neg(p \vee q)$ EV (2,3-7,8-12)

14) $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ $E\wedge$ (2,13)

15) $\neg(p \vee q)$ $I \neg$ (2,14)

3. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

- $\neg(p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q)$

1) $\neg(p \wedge q)$ Premisa

2) $\neg(\neg p \vee \neg q)$ Premisa Auxiliar - PBC

| | |
|---|---|
| 3) $\neg p$ Premisa Auxiliar | 7) $\neg q$ Premisa Auxiliar |
| 4) $(\neg p \vee \neg q)$ IV (3) | 8) $(\neg p \vee \neg q)$ IV (7) |
| 5) $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$ $I\wedge$ (4,2) | 9) $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$ $I\wedge$ (9,2) |

6) p PBC (3,5)

10) q PBC (7,9)

11) $(p \wedge q)$ $I\wedge$ (6,10)

12) $((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$ $I\wedge$ (1,11)

13) $(\neg p \vee \neg q)$ PBC (2,12)

- $(\neg p \vee \neg q) \vdash \neg(p \wedge q)$

1) $(\neg p \vee \neg q)$ Premisa

2) $(p \wedge q)$ Premisa Auxiliar

3) $\neg p$ Premisa Auxiliar

4) p $E\wedge$ (2)

5) $(p \wedge \neg p)$ $I\wedge$ (3,4)

6) $\neg(p \wedge q)$ ECQ (5)

7) $\neg q$ Premisa Auxiliar

8) q $E\wedge$ (2)

9) $(q \wedge \neg q)$ $I\wedge$ (7,8)

10) $\neg(p \wedge q)$ ECQ (9)

11) $\neg(p \wedge q)$ EV (1,3-6,7-10)

12) $((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$ $I\wedge$ (2,12)

13) $\neg(p \wedge q)$ $I \neg$ (2,12)

4. $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

- $(p \rightarrow q) \vdash (\neg p \vee q)$

| | |
|------------------------|-----------------------|
| 1) $(p \rightarrow q)$ | Premisa |
| 2) p | Premisa Auxiliar |
| 3) $\neg q$ | Premisa Auxiliar |
| 4) q | $E \rightarrow (1,2)$ |
| 5) $(\neg q \wedge q)$ | $I \wedge (2,3)$ |
| 6) $\neg p$ | $I \neg (2-5)$ |
| 7) $(\neg p \vee q)$ | $I \vee (6)$ |

- $(\neg p \vee q) \vdash (p \rightarrow q)$

Por el Teorema de la Deducción $\{(\neg p \vee q), p\} \vdash q$

| | | |
|------------------------|------------------------|---|
| 1) $(\neg p \vee q)$ | Premisa | |
| 2) p | Premisa | |
| 3) $\neg p$ | Premisa Auxiliar | 7) q Premisa Auxiliar |
| 4) $(p \wedge \neg p)$ | $I \wedge (2,3)$ | 8) $(p \wedge q)$ $I \wedge (2,7)$ |
| 5) q | ECQ (4) | 9) q $E \wedge (8)$ |
| 6) $(p \rightarrow q)$ | $I \rightarrow (2,5)$ | 10) $(p \rightarrow q)$ $I \rightarrow (2,9)$ |
| 11) $p \rightarrow q$ | $EV (1,3-6,7-10)$ | |
| 12) q | $E \rightarrow (2,11)$ | |

5. $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$

- $\neg(p \rightarrow q) \vdash (p \wedge \neg q)$

- 1) $\neg(p \rightarrow q)$ Premisa
- 2) $\neg(p \wedge \neg q)$ Prueba por reducción al absurdo
- 3) p Premisa Auxiliar
- 4) $(\neg p \vee \neg\neg q)$ Ley de De Morgan 2

| | | | |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| 5) $\neg p$ | Premisa Auxiliar | 9) $\neg\neg q$ | Premisa Auxiliar |
| 6) $(p \wedge \neg p)$ | $I \wedge (3,5)$ | 10) q | $E \neg (9)$ |
| 7) q | ECQ (6) | 11) $(p \wedge q)$ | $I \wedge (3,10)$ |
| 8) $(p \rightarrow q)$ | $I \rightarrow (3,7)$ | 12) q | $E \wedge (11)$ |
| | | 13) $(p \rightarrow q)$ | $I \rightarrow (3,12)$ |

- 14) $(p \rightarrow q)$ EV (4,5-8,9-13)
- 15) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ $I \wedge (2,14)$
- 16) $(p \wedge \neg q)$ ECQ (15)

- $(p \wedge \neg q) \vdash \neg(p \rightarrow q)$

- 1) $(p \wedge \neg q)$ Premisa
- 2) $(p \rightarrow q)$ Premisa Auxiliar
- 3) p $E \wedge (1)$
- 4) q $E \rightarrow (2,3)$
- 5) $\neg q$ $E \wedge (1)$
- 6) $(q \wedge \neg q)$ $I \wedge (4,5)$
- 7) $\neg(p \rightarrow q)$ $I \neg (2,6)$

Ejercicio 3: Formalizar los siguientes razonamientos:

- 1) Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.

p: Iré al médico
 q: Llueve
 r: Tendré comida
 s: Iré al restaurante

$$\frac{\begin{array}{l} (q \rightarrow \neg p) \\ (\neg p \rightarrow ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg \neg r \wedge s))) \\ (q \wedge r) \end{array}}{s}$$

$$\{(q \rightarrow \neg p), (\neg p \rightarrow ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg \neg r \wedge s))), (q \wedge r)\} \vdash s$$

- 2) Si f es diferenciable en [a, b], es continua y acotada en [a, b]. Si f no fuese acotada en [a, b] no podría ser diferenciable en [a, b]. Por tanto: si f es discontinua y acotada en [a, b], no es diferenciable en [a, b].

p: f es diferenciable en [a, b]
 q: f es continua en [a, b]
 r: f es acotada en [a, b]

$$\frac{\begin{array}{l} (p \rightarrow (q \wedge r)) \\ (\neg r \rightarrow \neg p) \end{array}}{((\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p)}$$

$$\{(p \rightarrow (q \wedge r)), (\neg r \rightarrow \neg p)\} \vdash ((\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

Ejercicio 4: Usando el sistema de DN, probar (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.

- $\{(q \rightarrow \neg p), (\neg p \rightarrow ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s))), (q \wedge r)\} \vdash s$

- 1) $(q \rightarrow \neg p)$ Premisa
- 2) $(\neg p \rightarrow ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s)))$ Premisa
- 3) $(q \wedge r)$ Premisa
- 4) q $E\wedge$ (3)
- 5) $\neg p$ $E\rightarrow$ (1,4)
- 6) $((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s))$ $E\rightarrow$ (2,5)

| | | | |
|--|------------------|-----------------------------|------------------|
| 7) $\neg s$ Premisa Auxiliar-Prueba por reducción al absurdo | | | |
| 8) $(\neg r \wedge \neg s)$ | Premisa Auxiliar | 13) $(\neg\neg r \wedge s)$ | Premisa Auxiliar |
| 9) r | $E\wedge$ (3) | 14) s | $E\wedge$ (13) |
| 10) $\neg r$ | $E\wedge$ (8) | 15) $(s \wedge \neg s)$ | $I\wedge$ (7,14) |
| 11) $(r \wedge \neg r)$ | $I\wedge$ (9,10) | 16) s | PBC (7,15) |
| 12) s | PBC (7,11) | | |

- 17) s EV (6,8-12,13-16)

- $\{(p \rightarrow (q \wedge r)), (\neg r \rightarrow \neg p)\} \vdash ((\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p)$

Por el teorema de la deducción: $\{(p \rightarrow (q \wedge r)), (\neg r \rightarrow \neg p), ((\neg q \wedge r) \wedge \neg p)\} \vdash \neg p$

- 1) $(p \rightarrow (q \wedge r))$ Premisa
 - 2) $(\neg r \rightarrow \neg p)$ Premisa
- | | |
|------------------------|----------------------|
| 3) p | Premisa Auxiliar |
| 4) $(q \wedge r)$ | $E\rightarrow$ (1,3) |
| 5) q | $E\wedge$ (4) |
| 6) $(\neg q \wedge r)$ | Premisa |
| 7) $\neg q$ | $E\wedge$ (6) |
| 8) $(q \wedge \neg q)$ | $I\wedge$ (5,7) |
- 9) $\neg p$ $I\neg$ (3,8)

Ejercicio 5: Usando el sistema de DN, demuestre la validez de las siguientes deducciones:

1. $\{(p \wedge q)\} \vdash (p \wedge (q \vee r))$

- 1) $(p \wedge q)$ Premisa
- 2) p $E\wedge$ (1)
- 3) q $E\wedge$ (1)
- 4) $(q \vee r)$ $I\vee$ (2)
- 5) $(p \wedge (q \vee r))$ $E\wedge$ (2,4)

2. $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \vdash (p \rightarrow r)$

- | | | |
|----|---------------------|-----------------------|
| 1) | $(p \rightarrow q)$ | Premisa |
| 2) | $(q \rightarrow r)$ | Premisa |
| 3) | p | Premisa Auxiliar |
| 4) | q | $E \rightarrow (1,3)$ |
| 5) | r | $E \rightarrow (2,4)$ |
| 6) | $(p \rightarrow r)$ | $I \rightarrow (3,5)$ |

3. $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow r), (r \rightarrow s)\} \vdash (p \rightarrow s)$

- | | | |
|-----|------------------------------|------------------------|
| 1) | $(p \rightarrow (q \vee r))$ | Premisa |
| 2) | $(q \rightarrow r)$ | Premisa |
| 3) | $(r \rightarrow s)$ | Premisa |
| 4) | p | Premisa Auxiliar |
| 5) | $(q \vee r)$ | $E \rightarrow (1,4)$ |
| 6) | q | Premisa Auxiliar |
| 7) | r | $E \rightarrow (2,6)$ |
| 8) | s | $E \rightarrow (3,7)$ |
| 9) | $(q \rightarrow s)$ | $I \rightarrow (6,8)$ |
| 10) | s | $EV (5,6,3)$ |
| 11) | $(p \rightarrow s)$ | $I \rightarrow (4,10)$ |

4. $\{(p \rightarrow \neg q), (r \rightarrow q)\} \vdash \neg(p \wedge r)$

- | | | |
|----|--------------------------|-----------------------|
| 1) | $(p \rightarrow \neg q)$ | Premisa |
| 2) | $(r \rightarrow q)$ | Premisa |
| 3) | $(p \wedge r)$ | Premisa Auxiliar |
| 4) | p | $E \wedge (3)$ |
| 5) | $\neg q$ | $E \rightarrow (1,4)$ |
| 6) | r | $E \wedge (3)$ |
| 7) | q | $E \rightarrow (2,6)$ |
| 8) | $(q \wedge \neg q)$ | $I \wedge (5,7)$ |
| 9) | $\neg(p \wedge r)$ | $I \neg (3,8)$ |

5. $\{\neg p\} \vdash (p \rightarrow q)$

1) $\neg p$ Premisa

| | |
|------------------------|-----------------------|
| 2) p | Premisa Auxiliar |
| 3) $(p \wedge \neg p)$ | $I \wedge (1,2)$ |
| 4) q | ECQ (3) |
| 5) $(p \rightarrow q)$ | $I \rightarrow (2,4)$ |

6. $\{(p \rightarrow q)\} \vdash (\neg p \vee q)$

1) $(p \rightarrow q)$ Premisa

| | |
|---|-----------------------|
| 2) $\neg(\neg p \vee q)$ | Premisa Auxiliar |
| 3) $\neg p$ | Premisa Auxiliar |
| 4) $(\neg p \vee q)$ | IV (3) |
| 5) $((\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q))$ | $I \wedge (2,4)$ |
| 6) p | $I \neg (3,5)$ |
| 7) q | $E \rightarrow (1,6)$ |
| 8) $(\neg p \vee q)$ | IV (7) |
| 9) $(\neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q))$ | $I \wedge (2,8)$ |
| 10) $(\neg p \vee q)$ | EV (2,9) |