LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 3: LÓGICA PROPOSICIONAL

DEDUCCIÓN NATURAL

Ejercicio 1:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra:

1. $(\varphi \wedge \varphi) \vdash \varphi$ (idempotencia 1)

   1) $(\varphi \wedge \varphi)$ Premisa
   2) φ E$\wedge$(1)

2. $\varphi \vdash (\varphi \wedge \varphi)$ (idempotencia 2)

   1) φ Premisa
   2) φ Iteración(1)
   3) $(\varphi \wedge \varphi)$ I$\wedge(1, 2)$

3. $\{(\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi)\} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ (introducción de la coimplicación)

   1) $(\varphi \rightarrow \psi)$ Premisa
   2) $(\psi \rightarrow \varphi)$ Premisa
   3) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ I$\wedge(1, 2)$
   4) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Por equivalencia lógica(3)

4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ (eliminación de la coimplicación 1)

   1) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Premisa
   2) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ Por equivalencia lógica(1)
   3) $(\varphi \rightarrow \psi)$ E$\wedge$(2)

5. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$ (eliminación de la coimplicación 2)

   1) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Premisa
   2) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ Por equivalencia lógica(1)
   3) $(\psi \rightarrow \varphi)$ E$\wedge$(2)

Ejercicio 2:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:

1. $\{(p \wedge q), r\} \vdash (q \vee r)$

   1) r Premisa
   2) $(q \vee r)$ I$\vee$(1)

2. $\{(\neg p \wedge q), ((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p))\} \vdash (r \vee \neg p)$

1)	$((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p))$	Premisa
2)	$(\neg p \wedge q)$	Premisa
3)	$(r \vee \neg p)$	E$\rightarrow$ $(1,2)$

3. $\{p, \neg\neg(q \wedge r)\} \vdash (\neg\neg p \wedge r)$

1)	p	Premisa
2)	$\neg\neg(q \wedge r)$	Premisa
3)	$(q \wedge r)$	E$\neg(2)$
4)	r	E$\wedge(3)$

5)	$\neg\neg\neg p$	Premisa Auxiliar - PBC
6)	$\neg p$	E$\neg(5)$
7)	$(p \wedge \neg p)$	I$\wedge(1,6)$

8)	$\neg\neg p$	PBC$(5,7)$
9)	$(\neg\neg p \wedge r)$	I$\wedge(8,4)$

4. $\{p, (p \rightarrow q), (p \rightarrow (q \rightarrow r))\} \vdash r$

1)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Premisa
2)	$(p \rightarrow q)$	Premisa
3)	p	Premisa
4)	$(q \rightarrow r)$	E$\rightarrow$ $(1,3)$
5)	q	E$\rightarrow$ $(2,3)$
6)	r	E$\rightarrow$ $(4,5)$

5. $\{(p \rightarrow (q \rightarrow r)), p, \neg r\} \vdash \neg q$

1)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Premisa
2)	p	Premisa
3)	$(q \rightarrow r)$	E$\rightarrow$ $(1,2)$
4)	$\neg r$	Premisa
5)	$\neg q$	MT$(4,3)$

6. $\{(p \wedge q)\} \vdash (p \wedge (q \vee r))$

1)	$(p \wedge q)$	Premisa
2)	p	E$\wedge(1)$
3)	q	E$\wedge(1)$
4)	$(q \vee r)$	I$\vee(3)$

5) $(p \wedge (q \vee r))$ — I$\wedge(2,4)$

7. $\{(p \to q), (q \to r)\} \vdash (p \to r)$

1)	$(p \to q)$	Premisa
2)	$(q \to r)$	Premisa
3)	p	Premisa Auxiliar
4)	q	E$\to (1,3)$
5)	r	E$\to (2,4)$
6)	$(p \to r)$	I$\to (3,5)$

8. $\{(p \to (q \vee r)), (q \to r), (r \to s)\} \vdash (p \to s)$

1)	$(p \to (q \vee r))$	Premisa
2)	$(q \to r)$	Premisa
3)	$(r \to s)$	Premisa
4)	p	Premisa Auxiliar
5)	$(q \vee r)$	E$\to (1,4)$

6)	q	Premisa Auxiliar	9)	r	Premisa Auxiliar
7)	r	E$\to (2,6)$	10)	s	E$\to (3,9)$
8)	s	E$\to (3,7)$			

11)	s	E$\vee(5,8,10)$
12)	$(p \to s)$	I$\to (4,11)$

9. $\{(p \to \neg q), (r \to q)\} \vdash \neg(p \wedge r)$

1)	$\neg\neg(p \wedge r)$	Premisa Auxiliar - PBC
2)	$(p \to \neg q)$	Premisa
3)	$(r \to q)$	Premisa
4)	$(p \wedge r)$	E$\neg(1)$
5)	p	E$\wedge(4)$
6)	$\neg q$	E$\to (2,5)$
7)	r	E$\wedge(4)$
8)	q	E$\to (3,7)$

9) $(\neg q \wedge q)$ — I$\wedge(6,8)$

10) $\neg(p \wedge r)$ — PBC$(1,9)$

10. $\{\neg p\} \vdash (p \rightarrow q)$
Por el teorema de la deducción: $\{\neg p, p\} \vdash q$

1)	$\neg p$	Premisa
2)	p	Premisa
3)	$(\neg p \wedge p)$	I$\wedge(1,2)$
4)	q	ECQ(3)

11. $\{(p \rightarrow q)\} \vdash (\neg p \vee q)$

1)	$\neg(\neg p \vee q)$	Premisa Auxiliar - PBC
2)	$(p \rightarrow q)$	Premisa
3)	p	Premisa Auxiliar
4)	q	E$\rightarrow (1,3)$
5)	$(p \wedge q)$	I$\wedge(3,4)$
6)	$\neg q$	Premisa Auxiliar
7)	$\neg p$	MT$(2,6)$
8)	$(\neg p \wedge \neg q)$	I$\wedge(6,7)$
9)	p	E$\wedge(5)$
10)	$\neg p$	E$\wedge(8)$
11)	$(p \wedge \neg p)$	I$\wedge(9,10)$
12)	$(\neg p \vee q)$	PBC$(1,11)$

Ejercicio 3:

Formaliza los siguientes razonamientos:

1. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.

   Sean:
   p: Iré al mercado

q: Llueve
r: Tengo comida
s: Iré al restaurante

Entonces tenemos:
$(q \to \neg p)$
$(\neg p \to ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s)))$
$(q \wedge r)$

---

s

$\{(q \to \neg p), (\neg p \to ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s))\} \vdash s$

2. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podría ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$, no es diferenciable en $[a, b]$.

   Sean:
   p: f es diferenciable en $[a, b]$
   q: f es continua en $[a, b]$
   r: f es acotada en $[a, b]$

   Entonces tenemos:
   $(p \to (q \wedge r))$
   $(\neg r \to \neg p)$

   $((\neg q \wedge r) \to \neg p)$

   $\{(p \to (q \wedge r)), (\neg r \to \neg p)\} \vdash ((\neg q \wedge r) \to \neg p)$

Ejercicio 4:
Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.

1. $\{(q \to \neg p), (\neg p \to ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s))), (q \wedge r)\} \vdash s$

1)	$\neg s$	Premisa Auxiliar - PBC
2)	$(q \to \neg p)$	Premisa
3)	$(\neg p \to ((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s)))$	Premisa
4)	$(q \wedge r)$	Premisa
5)	q	E$\wedge$(4)
6)	$\neg p$	E$\to$ $(2, 5)$
7)	$((\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg\neg r \wedge s))$	E$\to$ $(3, 6)$

8) $(\neg r \wedge \neg s)$ Premisa Auxiliar	13) $(\neg\neg r \wedge s)$ Premisa Auxiliar
9) r E$\wedge(4)$	14) s E$\wedge(13)$
10) $\neg r$ E$\wedge(8)$	15)$(\neg s \wedge s)$ I$\wedge(1,14)$
11) $(r \wedge \neg r)$ I$\wedge(9,10)$	16)s ECQ(15)
12) s ECQ(11)	

17) s E$\vee(7,12,16)$

18) $(\neg s \wedge s)$ I$\wedge(1,17)$

19) s PBC$(1,18)$

2. $\{(p \to (q \wedge r)), (\neg r \to \neg p)\} \vdash ((\neg q \wedge r) \to \neg p)$

   Por el teorema de la deducción: $\{((p \to (q \wedge r)), (\neg r \to \neg p), (\neg q \wedge r)\} \vdash \neg p$

   1) $(p \to (q \wedge r))$ Premisa
   2) $(\neg r \to \neg p)$ Premisa

      3) p Premisa Auxiliar
      4) $(q \wedge r)$ E$\to(1,3)$
      5) q E$\wedge(4)$
      6) $(\neg q \wedge r)$ Premisa
      7) $\neg q$ E$\wedge(4)$
      8) $(q \wedge \neg q)$ I$\wedge(5,7)$

   9) $\neg p$ I$\neg(3,8)$

Ejercicio 5:

Resolver utilizando el Teorema de la deducción:

1. $\vdash ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

   Por el teorema de la deducción: $\{(p \to (q \to r)), (p \to q), p\} \vdash r$

   1) $(p \to (q \to r))$ Premisa
   2) $(p \to q)$ Premisa
   3) p Premisa
   4) $(q \to r)$ E$\to(1,3)$
   5) q E$\to(2,3)$
   6) r E$\to(4,5)$

2. $\vdash ((\neg p \to q) \to ((p \to q) \to q))$

   Por el teorema de la deducción: $\{(\neg p \to q), (p \to q)\} \vdash q$

1) $(\neg p \rightarrow q)$ Premisa

2) $(p \rightarrow q)$ Premisa

3) $\neg q$	Premisa Auxiliar - PBC
4) $\neg\neg p$	$\mathrm{MT}(1,3)$
5) $\neg p$	$\mathrm{MT}(2,3)$
6) p	$\mathrm{E}\neg(4)$
7) $(\neg p \wedge p)$	$\mathrm{I}\wedge(5,6)$

8) q $\mathrm{PBC}(3,7)$

3. $\vdash ((((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$

   Por el teorema de la deducción: $\{(((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)), p\} \vdash \neg q$

1) $(((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ Premisa

2) p Premisa

3) $((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$ $\mathrm{E}\wedge(1)$

4) $((p \vee q) \rightarrow r)$ $\mathrm{E}\wedge(1)$

5) $(p \vee q)$ $\mathrm{I}\vee(2)$

6) r $\mathrm{E}\rightarrow(4,5)$

7) $\neg\neg q$	Premisa Auxiliar - PBC
8) q	$\mathrm{E}\neg(7)$
9) $(p \wedge q)$	$\mathrm{I}\wedge(2,8)$
10) $\neg r$	$\mathrm{E}\rightarrow(3,9)$
11) $(r \wedge \neg r)$	$\mathrm{I}\wedge(6,10)$

12) $\neg q$ $\mathrm{PBC}(7,11)$

Ejercicio 6:

Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de Deducción Natural:

1. $\neg\neg p \equiv p$
   - $\{\neg\neg p\} \vdash p$

     1. $\neg\neg p$ Premisa
     2. p $\mathrm{E}\neg(1)$

   - $\{p\} \vdash \neg\neg p$

     1. p Premisa

2. $\neg\neg\neg p$ — Premisa Auxiliar - PBC
3. $\neg p$ — $\mathrm{E}\neg(2)$
4. $(p \wedge \neg p)$ — $\mathrm{I}\wedge(1,3)$

5. $\neg\neg p$ — $\mathrm{PBC}(2,4)$

2. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

- $\{\neg(p \vee q)\} \vdash (\neg p \wedge \neg q)$

1) $\neg(p \vee q)$ — Premisa

2) p — Premisa Auxiliar
3) $(p \vee q)$ — $\mathrm{I}\vee(2)$
4) $((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))$ — $\mathrm{I}\wedge(1,3)$

5) $\neg p$ — $\mathrm{I}\neg(2,4)$

6) q — Premisa Auxiliar
7) $(p \vee q)$ — $\mathrm{I}\vee(6)$
8) $((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))$ — $\mathrm{I}\wedge(1,7)$

9) $\neg q$ — $\mathrm{I}\neg(6,8)$
10) $(\neg p \wedge \neg q)$ — $\mathrm{I}\wedge(5,9)$

- $\{(\neg p \wedge \neg q)\} \vdash \neg(p \vee q)$

1) $\neg\neg(p \vee q)$ — Premisa Auxiliar - PBC
2) $(\neg p \wedge \neg q)$ — Premisa
3) $(p \vee q)$ — $\mathrm{E}\neg(1)$

4) p — Premisa Auxiliar	7) q — Premisa Auxiliar
5) $\neg p$ — $\mathrm{E}\wedge(2)$	8) $\neg q$ — $\mathrm{E}\wedge(2)$
6) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ — $\mathrm{ECQ}(4,5)$	9) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ — $\mathrm{ECQ}(7,8)$

10) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ — $\mathrm{E}\vee(3,6,9)$
11) $((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$ — $\mathrm{I}\wedge(2,10)$

12) $\neg(p \vee q)$ — $\mathrm{PBC}(1,11)$

3. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

- $\{\neg(p \wedge q)\} \vdash (\neg p \vee \neg q)$

1) $\neg(p \wedge q)$ — Premisa

2) $\neg(\neg p \vee \neg q)$	Premisa Auxiliar - PBC
3) $\neg p$	Premisa Auxiliar
4) $(\neg p \vee \neg q)$	$\mathrm{I}\vee(3)$
5) $(\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$	$\mathrm{I}\wedge(2,4)$
6) $\neg\neg p$	$\mathrm{I}\neg(3,5)$
7) p	$\mathrm{E}\neg(6)$
8) $\neg q$	Premisa Auxiliar
9 $(\neg p \vee \neg q)$	$\mathrm{I}\vee(7)$
10) $(\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$	$\mathrm{I}\wedge(2,9)$
11) $\neg\neg q$	$\mathrm{I}\neg(8,10)$
12) q	$\mathrm{E}\neg(11)$
13) $(p \wedge q)$	$\mathrm{I}\wedge(7,12)$
14) $(\neg(p \wedge q) \wedge (p \wedge q))$	$\mathrm{I}\wedge(1,13)$

15) $(\neg p \vee \neg q)$ $\mathrm{PBC}(2,14)$

- $\{(\neg p \vee \neg q)\} \vdash \neg(p \wedge q)$

1) $(p \wedge q)$	Premisa Auxiliar
2) $(\neg p \vee \neg q)$	Premisa

3) $\neg p$	Premisa Auxiliar	7) $\neg q$	Premisa Auxiliar
4) p	$\mathrm{E}\wedge(1)$	8) q	$\mathrm{E}\wedge(1)$
5) $(\neg p \wedge p)$	$\mathrm{I}\wedge(3,4)$	9) $(\neg q \wedge q)$	$\mathrm{I}\wedge(7,8)$
6) $\neg(p \wedge q)$	ECQ(5)	10) $\neg(p \wedge q)$	ECQ(9)

11) $\neg(p \wedge q)$	$\mathrm{E}\vee(2,6,10)$
12) $((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$	$\mathrm{I}\wedge(1,11)$

13) $\neg(p \wedge q)$ $\mathrm{I}\neg(1,12)$

4. $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$
   - $\{(p \to q)\} \vdash (\neg p \vee q)$

1) $\neg(\neg p \vee q)$	Premisa Auxiliar - PBC
2) $(p \to q)$	Premisa
3) p	Premisa Auxiliar
4) q	$\mathrm{E}\to (1,3)$
5) $(p \wedge q)$	$\mathrm{I}\wedge(3,4)$
6) $\neg q$	Premisa Auxiliar
7) $\neg p$	$\mathrm{MT}(2,6)$
8) $(\neg p \wedge \neg q)$	$\mathrm{I}\wedge(6,7)$
9) p	$\mathrm{E}\wedge(5)$
10) $\neg p$	$\mathrm{E}\wedge(8)$
11) $(p \wedge \neg p)$	$\mathrm{I}\wedge(9,10)$

12) $(\neg p \vee q)$ $\mathrm{PBC}(1,11)$

- $\{(\neg p \vee q)\} \vdash (p \to q)$

Por el teorema de la deducción: $\{(\neg p \vee q), p\} \vdash q$

1) p	Premisa
2) $(\neg p \vee q)$	Premisa

3) $\neg p$	Premisa Auxiliar	7) q	Premisa Auxiliar
4) $(p \wedge \neg p)$	$\mathrm{I}\wedge(1,3)$	8) $(p \to q)$	$\mathrm{I}\to (1,7)$
5) q	$\mathrm{ECQ}(4)$		
6) $(p \to q)$	$\mathrm{I}\to (2,5)$		

9) $(p \to q)$	$\mathrm{E}\vee(2,6,8)$
10) p	Iteración(1)
11) q	$\mathrm{E}\to (9,10)$

5. $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$

- $\{\neg(p \to q)\} \vdash (p \wedge \neg q)$

1) $\neg(p \wedge \neg q)$ Premisa Auxiliar - PBC

2) $\neg(p \rightarrow q)$ Premisa

3) p Premisa Auxiliar

4) $(\neg p \vee \neg\neg q)$ Ley de De Morgan 1

5) $\neg p$	Premisa Auxiliar	8) $\neg\neg q$	Premisa Auxiliar
6) $(p \wedge \neg p)$	I$\wedge(3,5)$	9) q	E$\neg(8)$
7) q	ECQ(6)		

10) q E$\vee(4,7,9)$

11) $(p \rightarrow q)$ I$\rightarrow(3,10)$

12) $(\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$ I$\wedge(2,11)$

13) $(p \wedge \neg q)$ PBC$(1,12)$

- $\{(p \wedge \neg q)\} \vdash \neg(p \rightarrow q)$

1) $(p \wedge \neg q)$ Premisa

2) $(p \rightarrow q)$ Premisa Auxiliar
3) p E$\wedge(1)$
4) q E$\rightarrow(2,3)$
5) $\neg q$ E$\wedge(1)$
6) $(q \wedge \neg q)$ I$\wedge(4,5)$

7) $\neg(p \rightarrow q)$ I$\neg(2,6)$

Ejercicio 7:
Probar $\{(p \rightarrow (\neg q \vee r))\} \models (q \rightarrow \neg(p \wedge \neg r))$:

2. Construyendo una demostración con las reglas del cálculo de Deducción Natural y justificando el resultado con el teorema de la Corrección.

1) $(p \rightarrow (\neg q \vee r))$ Premisa

2) q Premisa Auxiliar

3) $\neg\neg(p \wedge \neg r)$	Premisa Auxiliar
4) $(p \wedge \neg r)$	E$\neg$(3)
5) p	E$\wedge$(4)
6) $(\neg q \vee r)$	E$\rightarrow$ $(1, 5)$

7) $\neg q$	Premisa Auxiliar	9) r	Premisa Auxiliar
8) $\neg p$	ECQ$(2, 7)$	10) $\neg r$	E$\wedge$(4)
		11) $\neg p$	ECQ$(9, 10)$

12) $\neg p$	E$\vee$$(6, 8, 11)$
13) $(p \wedge \neg p)$	I$\wedge$$(5, 12)$
14) $\neg(p \wedge \neg r)$	PBC$(3, 13)$
15) $(q \rightarrow \neg(p \wedge \neg r))$	I$\rightarrow$ $(2, 14)$