Árboles de Refutación para la Lógica de Predicados

1. Introducción

Antes de comenzar el análisis de cómo extender los árboles de refutación a la Lógica de Predicados, vamos a recordar cómo se evalúa el valor de verdad de una fórmula φ que pertenece a un lenguaje con vocabulario σ, como una función definida sobre el conjunto de fórmulas de L_σ.

Se define una σ–interpretación como un par $I = (\mathcal{A}, \beta)$ consistente de una σ–estructura $\mathcal{A}$ y una función de asignación β.

Denotaremos con U al dominio de la σ–estructura $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} = (U, \alpha)$, donde , α es una función que asigna a cada símbolo de constantes, del conjunto $\mathcal{C}$, un elemento del dominio; a cada símbolo de función k-aria, del conjunto $\mathcal{F}$, una función k-aria total y cerrada sobre U; y a cada símbolo de predicado k-ario del conjunto $\mathcal{P}$, una relación k-aria sobre el universo U.

Si denotamos al conjunto de variables de L_σ con Var, o sea $Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, dada una σ–estructura $\mathcal{A}$ se define la asignación β como una función definida desde el conjunto Var en el dominio U de la σ–estructura; es decir:

$$\beta : Var \longrightarrow U$$

$$\beta(x_i) = a \quad \text{con } x_i \in Var \text{ y } a \in U$$

Para determinar si $\mathcal{I} \models \varphi$, o sea que una σ–interpretación $\mathcal{I}$ satisface a una fórmula φ de un lenguaje de primer orden, se utiliza la función $V_\mathcal{I}(\varphi)$ que evalúa el valor de verdad de una fórmula φ para una σ–interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$. Esta función depende de la interpretación que $\mathcal{I}$ le asigna al vocabulario y de la función de asignación β en dicha interpretación. Cada asignación β determina un único valor de verdad para cada fórmula φ de L_σ. Más formalmente, si $\mathbb{F}$ es el conjunto de fórmulas del lenguaje L_σ:

$$V_\mathcal{I} : \mathbb{F} \longrightarrow \{\top, \bot\}$$

Para poder mostrar cómo obtenemos $V_\mathcal{I}(\varphi)$ para cualquier fórmula φ de $\mathbb{F}$ se define previamente cómo interpretar los términos de L_σ. Interpretamos los términos de L_σ del siguiente modo:

1. Si t es una variable x_i, $\mathcal{I}(t) = \beta(x_i)$
2. Si t es una constante c_j, $\mathcal{I}(t) = \alpha(c_j)$
3. Si t es $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, ya conocemos $\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k)$ que son todos elementos del dominio U, por lo tanto $(\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in U^k$ y $f^\mathcal{I}$ es una función k-aria asignada por $\mathcal{I}$ al símbolo de función k-ario f. Entonces, $\mathcal{I}(t) = f^\mathcal{I}(\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k))$.

Ahora definimos $V_\mathcal{I}(\varphi)$ inductivamente del siguiente modo:

- Si φ es una fórmula atómica, entonces φ es $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ (donde P es un predicado de aridad k), así:
$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top \text{ sii } (\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in P^{\mathcal{I}}$$
- Si φ es $\neg\psi$, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \bot$.
- Si φ es $(\psi \to \eta)$, entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \bot$ o $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.
- Si φ es $(\psi \vee \eta)$, entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ o $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.
- Si φ es $(\psi \wedge \eta)$, entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ y $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.
- Si φ es $(\forall x\ \psi)$, entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii para todo $a \in U$, $V_{(\mathcal{A}, \beta_{(x/a)})}(\psi) = \top$
- Si φ es $(\exists x\ \psi)$, entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ sii existe $a \in U$, tal que $V_{(\mathcal{A}, \beta_{(x/a)})}(\psi) = \top$

Donde, para cada $a \in U$, consideramos una nueva función de asignación $\beta(x/a)$, tal que:
$$\beta_{(x/a)}(x_i) = \begin{cases} \beta(x_i) & \text{si } x_i \text{ es distinto de } x \\ a & \text{si } x_i \text{ es igual a } x \end{cases}$$

2. Árboles de Refutación

Nos proponemos ahora extender el método de los árboles de refutación visto en la Lógica Proposicional a la Lógica de Predicados de Primer Orden.

Supondremos, como hasta ahora, que hemos fijado un lenguaje de primer orden L con vocabulario σ, y siempre que hablemos de términos y fórmulas, nos referiremos a términos y fórmulas de L_σ.

Con $\boldsymbol{R}_\neg$, $\boldsymbol{R}_\vee$, $\boldsymbol{R}_{\neg\vee}$, $\boldsymbol{R}_\wedge$, $\boldsymbol{R}_{\neg\wedge}$, $\boldsymbol{R}_\to$ y $\boldsymbol{R}_{\neg\to}$ indicaremos a los mismos esquemas vistos en la Lógica Proposicional, con la única diferencia que las fórmulas proposicionales $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ que figuran en las premisas y conclusiones de los mismos deben ser reemplazadas por fórmulas φ y ψ del lenguaje L_σ.

Teniendo en cuenta la definición inductiva de $V_{\mathcal{I}}$, la demostración del Lema 1 del apunte de la Lógica Proposicional sobre *La consecuencia lógica y la deducción* se adapta inmediatamente para probar que:

Lema 1 *Sea Φ un conjunto satisfacible de fórmulas de L_σ.*

1. *Si la premisa de uno de los esquemas $\boldsymbol{R}_\neg$, $\boldsymbol{R}_{\neg\vee}$, $\boldsymbol{R}_\wedge$ y $\boldsymbol{R}_{\neg\to}$ está en Φ, entonces Φ ampliado con las conclusiones de dicho esquema continúa siendo satisfacible.*

2. *Si la premisa de uno de los esquemas $\boldsymbol{R}_\vee$, $\boldsymbol{R}_{\neg\wedge}$ y $\boldsymbol{R}_\to$ está en Φ, entonces al menos una de las dos posibles ampliaciones de Φ por el agregado de una de las conclusiones de dicho esquema es satisfacible.*

Veremos ahora el comportamiento de los cuantificadores con respecto a la satisfacibilidad.

Lema 2 *Para todo conjunto satisfacible de fórmulas Φ se tiene que:*

1. *Si* $(\forall x\ \varphi) \in \Phi$*, entonces* $\Phi \cup \{\varphi(x/t)\}$ *es satisfacible, para todo término* t *adecuado para sustituir a* x *en* φ*.*

2. *Si* $(\exists x\ \varphi) \in \Phi$*, entonces* $\Phi \cup \{\varphi(x/c)\}$ *es satisfacible, para todo símbolo de constante* c *que no figure en ninguna de las fórmulas del conjunto* Φ*.*

3. *Si* $\neg(\forall x\ \varphi) \in \Phi$*, entonces* $\Phi \cup \{\neg\varphi(x/c)\}$ *es satisfacible, para todo símbolo de constante* c *que no figure en ninguna de las fórmulas del conjunto* Φ*.*

4. *Si* $\neg(\exists x\ \varphi) \in \Phi$*, entonces* $\Phi \cup \{\neg\varphi(x/t)\}$ *es satisfacible, para todo término* t *adecuado para sustituir a* x *en* φ*.*

Demostración: Como Φ es satisfacible, existe una interpretación $\mathcal{I}$, es decir una σ-estrctura $\mathcal{A}$ y una función de asignación β en $U = U^I$ tal que $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ para toda $\psi \in \Phi$.

Si $(\forall x\ \varphi) \in \Phi$, entonces $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ \varphi)) = \top$, y por definición de $V_{\mathcal{I}}$ resulta que $V_{\mathcal{A},\beta_{(x/a)}}(\varphi) = \top$ para todo término $a \in U^I$. Luego, como para todo término sin variables t de L_σ, $\mathcal{I}(t)$ designa un elemento de U^I, tenemos que

$$V_{\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(t))}}(\varphi) = \top \tag{1}$$

Entonces, sabiendo que se cumple la igualdad $V_{\mathcal{I}}(\varphi(x/t)) = V_{\mathcal{I}}(\varphi(x/\mathcal{I}(t)))$ podemos afirmar que:

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi(x/t)) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/t)})}(\varphi) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(t))})}(\varphi) \tag{2}$$

Finalmente, de (1) y (2) resulta que $V_{\mathcal{I}}(\varphi(x/t)) = \top$, para todo término t apto para sustituir a x en φ, y por lo tanto hemos probado *1*.

Supongamos ahora que $(\exists x\ \varphi) \in \Phi$, entonces $V_{\mathcal{I}}((\exists x\ \varphi)) = \top$ y por la definición de la asignación de valores de verdad $V_{\mathcal{I}}$, resulta que $V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/a)})}(\varphi) = \top$ para algún elemento $a \in U$, o lo que es lo mismo $V_{\mathcal{I}}(\varphi(x/a)) = \top$ para algún elemento $a \in U$.

Sea $c \in \mathcal{C}$ tal que no figure en ninguna de las fórmulas de Φ, y definamos la interpretación $\mathcal{I}'$ del lenguaje L_σ del siguiente modo:

$U^{\mathcal{I}'} = U^{\mathcal{I}} = U$
Para todo símbolo de predicado P: $P^{\mathcal{I}'} = P^{\mathcal{I}}$
Para todo símbolo de función f: $f^{\mathcal{I}'} = f^{\mathcal{I}}$
Para todo símbolo de constante b distinto de c: $b^{\mathcal{I}'} = b^{\mathcal{I}}$
$c^{\mathcal{I}'} = a$

Es decir, la única diferencia que puede existir entre las interpretaciones $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ es en el elemento del universo que le asignan al símbolo de constante c (o sea, sólo $\alpha_{\mathcal{I}}(c) \neq \alpha_{\mathcal{I}'}(c)$).

La asignación β es también una asignación para la interpretación $\mathcal{I}'$, y es claro que $V_{\mathcal{I}'}(\psi) = V_{\mathcal{I}}(\psi)$ para toda fórmula ψ en la que no figure la constante c (una demostración rigurosa puede hacerse por inducción en la $comp(\psi)$).

En particular, tendremos que $V_{\mathcal{I}'}(\psi) = \top$ para toda fórmula $\psi \in \Phi$ y que $V_{\mathcal{I}'}(\varphi(x/a)) = \top$. Pero,

$$V_{\mathcal{I}'}(\varphi(x/a)) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/a)})}(\varphi) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}'(c))})}(\varphi) = V_{\mathcal{I}'}(\varphi(x/c))$$

por la igualdad utilizada en la demostración del item *1*.

Lo que muestra que el conjunto $\Phi \cup \varphi(x/c)$ es satisfacible en la interpretación $\mathcal{I}'$. Luego, por la **Proposición 2** del apunte dela Lógica de Predicados (pag. 11), tenemos que $\Phi \cup \varphi(x/c)$ es también satisfacible en $\mathcal{I}$. Por lo tanto, hemos probado el ítem *2*.

Las demostraciones de los ítems 3) y 4) pueden hacerse siguiendo las mismas líneas y las dejamos a cargo del lector.

$\diamond$

El lema precedente sugiere considerar los siguientes esquemas:

$\boldsymbol{R}_\forall$	$\dfrac{(\forall x\ \varphi)}{\varphi(x/t)}$	donde t es cualquier término sin variables.
$\boldsymbol{R}_\exists$	$\dfrac{(\exists x\ \varphi)}{\varphi(x/c)}$	donde c es una constante, con restricciones.
$\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$	$\dfrac{\neg(\forall x\ \varphi)}{\neg\varphi(x/c)}$	donde c es una constante, con restricciones.
$\boldsymbol{R}_{\neg\exists}$	$\dfrac{\neg(\exists x\ \varphi)}{\neg\varphi(x/t)}$	donde t es cualquier término sin variables.

El agregado "con restricciones" que figura en las reglas $\boldsymbol{R}_\exists$ y $\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$ recuerda que el símbolo de constante c no puede ser elegido arbitrariamente.

Notemos que todo término en el que no figuran variables o es una constante o se obtiene de combinar símbolos de función con constantes, y es adecuado para sustituir las apariciones libres de cualquier variable en cualquier fórmula.

Dada una fórmula φ definimos $\varphi(x/t)$ de la siguiente manera:

Si x no ocurre libre en φ:	$\varphi(x/t)$ es φ.
Si x ocurre libre en φ:	$\varphi(x/t)$ es la fórmula obtenida al reemplazar todas las ocurrencias libres de x por t.

Ejemplo:

Si tenemos la siguiente fórmula:

$\varphi(x) : (\exists y \neg = (x, y))$ (es una fórmula válida en una estructura con dos elementos)

y sustituimos con términos con variables puede ocurrir que:

$\varphi(x/y) : (\exists y \neg = (y, y))$ (es una fórmula insatisfacible)

y esto es porque para poder sustituir hay reglas bien precisas, dado que los términos que podemos usar en la sustitución no pueden contener variables ligadas en la fórmula. Para evitar estos problemas nos restringiremos a sustituir *variables libres* por *términos sin variables*. $\square$

Si tenemos un árbol como el presentado en la Figura 1, podemos ver que al sustituir una variable por una constante, al aplicar la regla $\boldsymbol{R}_{\exists}$ (o de manera similar la regla $\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$), ésta debe ser "convenientemente elegida". Si sustituyéramos x por c_1 o por c_2, que ya fueron usadas anteriormente en esa rama del árbol, estaríamos afirmando que, el elemento del universo que satisface φ es el mismo que satisface las fórmulas anteriores. Eso no es lo que afirma este $(\exists x\varphi)$, esta fórmula nos dice que un elemento del universo satisface φ, pero no necesariamente c_1 o c_2. Entonces x se debe sustituir por *una constante que no se haya usado antes en esa rama*.

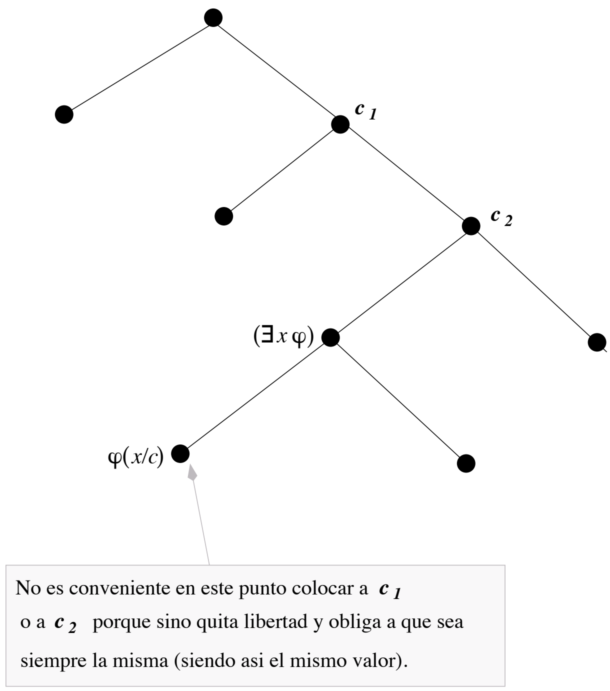


Figura 1: Uso de las constantes en un árbol de refutación.

Observando los esquemas anteriores, es claro que los símbolos de constante del lenguaje L_σ juegan un papel importante, y se vuelven inaplicables si L_σ no los tiene, esto es si $\mathcal{C} = \emptyset$. Esto nos lleva a considerar una ampliación del lenguaje L_σ por el agregado de nuevos símbolos de constante, que llamaremos *parámetros*. Más precisamente:

Definición 1 *Sea L_σ un lenguaje de primer orden, y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los símbolos de constante de L_σ. Indicaremos con L_σ^{Par} al lenguaje cuyo vocabulario tiene los mismos símbolos de función y de predicado que el vocabulario σ, de L_σ, con las mismas aridades, y tiene como símbolos de constante a los elementos de $\mathcal{C} \cup \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$. Los a_i son símbolos de constante que no figuran en el vocabulario de L_σ, y se llaman parámetros.*

Como siempre, vamos a indicar con $\mathbb{F}$ al conjunto de las fórmulas del lenguaje L_σ, e introducimos la notación $\mathbb{F}^{Par}$ para denotar al conjunto de fórmulas de L_σ^{Par}. Como todos los símbolos de L_σ figuran en L_σ^{Par}, toda fórmula de L_σ es también una fórmula de L_σ^{Par}; es decir $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^{Par}$.

Si $\mathcal{I}^{Par}$ es una interpretación de L_σ^{Par}, entonces $\mathcal{I}^{Par}$ también puede considerarse una interpretación de L_σ: basta con no tener en cuenta los $a_i^{\mathcal{I}^{Par}} \in U^{\mathcal{I}^{Par}}$, puesto que los a_i no son símbolos de L_σ. Además, para toda asignación β en $U^{\mathcal{I}^{Par}}$, y para toda φ en $\mathbb{F}$, $V_{\mathcal{I}^{Par}}(\varphi)$ tomará el mismo valor tanto si consideramos a $\mathcal{I}^{Par}$ como interpretación de L_σ como si la consideramos interpretación de L_σ^{Par} (puesto que por ser φ una fórmula de L_σ, en φ no puede figurar ningún parámetro). De estas consideraciones se deduce que si una fórmula φ de L_σ es satisfacible como fórmula de L_σ^{Par}, entonces también lo es como fórmula de L_σ.

Por otro lado, si $\mathcal{I}$ es una interpretación de L_σ, podemos extenderla a una interpretación de L_σ^{Par} de muchas maneras, tantas como las posibilidades que tengamos de elegir los valores $a_i^{\mathcal{I}} \in U^{\mathcal{I}}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$. Supongamos que fijamos una tal extensión, a la que continuamos llamando $\mathcal{I}$. El mismo argumento que utilizamos antes muestra que para toda asignación β en $U^{\mathcal{I}}$ y para toda $\varphi \in \mathbb{F}$, $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$ toma el mismo valor si consideramos a $\mathcal{I}$ como interpretación de L_σ o de L_σ^{Par}. Luego tenemos que si una fórmula de L_σ es satisfacible como fórmula de L_σ, también lo será como fórmula de L_σ^{Par}.

Las observaciones anteriores pueden resumirse en el siguiente lema:

Lema 3 *Sea Φ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden L_σ. Entonces Φ es satisfacible como subconjunto de $\mathbb{F}$ si y sólo si Φ es satisfacible como subconjunto de $\mathbb{F}^{Par}$.*

Por lo tanto, para estudiar problemas de satisfacibilidad, podemos siempre operar en el lenguaje L_σ^{Par}, que por construcción tiene infinitos símbolos de constante, y volver luego al lenguaje original L_σ.

Usaremos este principio para definir los árboles de refutación para fórmulas de un lenguaje de primer orden.

Sea $\mathcal{A}$ un árbol cuyos nodos son fórmulas de L_σ^{Par}. Un árbol $\mathcal{A}'$ se dice *una extensión inmediata* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}'$ se obtiene por aplicación de uno de los esquemas básicos a una fórmula φ que figura en algún nodo de $\mathcal{A}$ del siguiente modo:

1. Si el esquema aplicable es $\boldsymbol{R}_\neg$, $\boldsymbol{R}_{\neg\vee}$, $\boldsymbol{R}_\wedge$ o $\boldsymbol{R}_{\neg\rightarrow}$ (de tipo A), entonces se agrega un único nodo con una de las conclusiones del esquema como único sucesor de un nodo terminal de una rama de $\mathcal{A}$ que contenga a φ (esto es, se procede como en el caso proposicional).

2. Si el esquema aplicable es $\boldsymbol{R}_\vee$, $\boldsymbol{R}_{\neg\wedge}$ o $\boldsymbol{R}_\rightarrow$ (de tipo B), entonces se agregan dos nodos terminales, correspondientes a cada una de las conclusiones del esquema, como sucesores del nodo terminal de una rama de $\mathcal{A}$ que contenga a φ (se procede como en el caso proposicional).

3. Si el esquema aplicable es $\boldsymbol{R}_\forall$ o $\boldsymbol{R}_{\neg\exists}$, esto es, si φ es $(\forall x\ \psi)$ o $\neg(\exists x\ \psi)$, entonces se agrega $\psi(x/t)$ o $\neg\psi(x/t)$ respectivamente, como único sucesor del nodo terminal de una rama de $\mathcal{A}$ en la que figure φ, donde t es un término de L_σ^{Par} en el que no figuran variables.

4. Si el esquema aplicable es $\boldsymbol{R}_\exists$ o $\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$, esto es, si φ es $(\exists x\ \psi)$ o $\neg(\forall x\ \psi)$, entonces se agrega $\psi(x/a_i)$ o $\neg\psi(x/a_i)$, respectivamente, como único sucesor del nodo terminal de una rama de $\mathcal{A}$ en la que figure φ, donde a_i es un parámetro que no figura en ninguna fórmula de esa rama.

Definición 2 *Sea L_σ un lenguaje de primer orden y φ una fórmula de L_σ. Un* ***árbol de refutación de*** *φ es un árbol de fórmulas de L_σ^{Par} que se obtiene haciendo un número finito de extensiones inmediatas a partir del árbol cuyo único nodo es la fórmula φ.*

Un ***árbol de refutación de un conjunto finito*** $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \mathbb{F}$ *es un árbol de refutación de la conjunción $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.*

Como en el caso proposicional, diremos que una rama de un árbol de refutación es *cerrada* si en la misma figuran una fórmula y su negación, y que es *abierta* en caso contrario. Un árbol se dice *cerrado* si tiene todas sus ramas cerradas.

Teorema 1 *Si un conjunto finito* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \mathbb{F}$ *tiene un árbol de refutación cerrado, entonces* Φ *es insatisfacible.*

Demostración: Los Lemas 1 y 2 junto con la Definición 2 nos permiten repetir los argumentos usados en la demostración de (i) implica (ii) del Teorema 3 del apunte de la Lógica Proposicional sobre *La consecuencia lógica y la deducción*, para concluir que si Φ fuese satisfacible, entonces todo árbol de refutación de Φ debería tener al menos una rama satisfacible, y por lo tanto, abierta. Luego si Φ tiene un árbol de refutación cerrado, Φ debe ser insatisfacible.

Corolario 1 *Si* $\neg\varphi$ *tiene un árbol de refutación cerrado, entonces* φ *es universalmente válida o universalmente verdadera.*

Corolario 2 *Si* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\mu\} \subseteq \mathbb{F}$ *tiene un árbol de refutación cerrado, entonces* μ *es consecuencia de* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Los corolarios anteriores nos dan criterios *sintácticos* para poder asegurar que una fórmula universalmente verdadera, o que es consecuencia de un conjunto finito de fórmulas.

Como en el caso proposicional, diremos que un conjunto de fórmulas de L_σ es *cerrado* si contiene a una fórmula y a su negación, y diremos que es *saturado* si no es cerrado y si no se lo puede agrandar por aplicación de los esquemas básicos. Más precisamente:

Definición 3 *Un conjunto* $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ *se dice* ***saturado****, o* ***un conjunto de Hintikka****,si satisface las siguientes condiciones:*

H.1 *Una fórmula y su negación no pueden estar ambas en* $\mathbb{H}$.

H.2 *Si* $\neg\neg\varphi \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi \in \mathbb{H}$.

H.3 *Si* $(\varphi \vee \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi \in \mathbb{H}$ *o* $\psi \in \mathbb{H}$.

H.4 *Si* $\neg(\varphi \vee \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\neg\varphi \in \mathbb{H}$ *y* $\neg\psi \in \mathbb{H}$.

H.5 *Si* $(\varphi \wedge \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi \in \mathbb{H}$ *y* $\psi \in \mathbb{H}$.

H.6 $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\neg\varphi \in \mathbb{H}$ *o* $\neg\psi \in \mathbb{H}$.

H.7 *Si* $(\varphi \to \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\neg\varphi \in \mathbb{H}$ *o* $\psi \in \mathbb{H}$.

H.8 *Si* $\neg(\varphi \to \psi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi \in \mathbb{H}$ *y* $\neg\psi \in \mathbb{H}$.

H.9 *Si* $(\forall x\ \varphi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi(x/t) \in \mathbb{H}$ *para todo término* t *sin variables.*

H.10 *Si* $\neg(\forall x\ \varphi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\neg\varphi(x/c) \in \mathbb{H}$ *para algún símbolo de constante* c.

H.11 *Si* $(\exists x\ \varphi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\varphi(x/c) \in \mathbb{H}$ *para algún símbolo de constante* c.

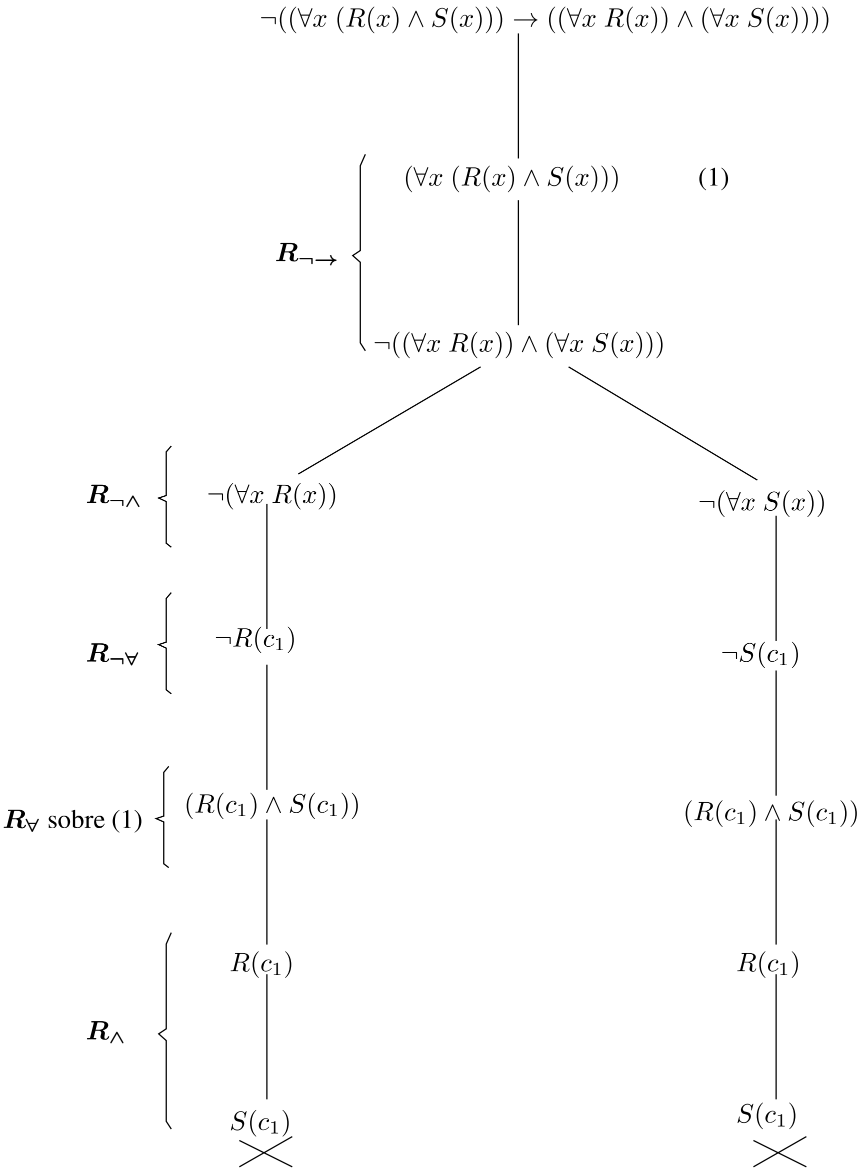
H.12 *Si* $\neg(\exists x\ \varphi) \in \mathbb{H}$, *entonces* $\neg\varphi(x/t) \in \mathbb{H}$ *para todo término* t *sin variables.*

Las reglas de $\boldsymbol{R}_{\forall}$ o $\boldsymbol{R}_{\neg\exists}$ se pueden aplicar múltiples veces. Esto se debe a que si sabemos que la fórmula $(\forall x\ \varphi)$ es verdadera, significa que *todo término* del universo satisface a φ, por lo tanto si esa fórmula aparece como premisa en el árbol, tiene tantas conclusiones como elementos tenga nuestro universo, por lo que nada nos impide volver a aplicar la regla $R_{\forall}$ reemplazando a x por un término diferente al usado. Lo mismo pasa con las fórmulas del tipo $\neg(\exists x\varphi)$, ya que éstas aseguran que ningún elemento del universo satisface a φ.

En cambio en las otras dos reglas, $\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$ o $\boldsymbol{R}_{\exists}$, se sabe que al memos *un elemento* del dominio no satisface $(\neg(\forall x\ \varphi))$, o satisface ($(\exists x\ \varphi)$) respectivamente a φ, por lo cual se pide que no haya repetición respecto de los parámetros que ya figuran en esa rama, y solo puede utilizarse *una* vez.

Ejemplo:

Para analizar si la siguiente fórmula es universalmente verdadera, construiremos el árbol de refutación para $\neg\varphi$ y veremos si es cerrado. Sea $\varphi : ((\forall x\ (R(x) \wedge S(x))) \rightarrow ((\forall x\ R(x)) \wedge (\forall x\ S(x))))$.



Como ambas ramas se cierran la fórmula φ es universalmente válida. Si consideramos la aplicación de la regla del $\boldsymbol{R}_{\neg\forall}$ en las conclusiones del tercer nodo del árbol, las constantes elegidas para sustituir a x, en $R(x)$ y $S(x)$ podrían ser distintas o no, ya que las premisas están en ramas diferentes, entonces elegimos la más conveniente para el caso, sólo se debe verificar que en *su rama* no aparezca la constante elegida para reemplazarla; en este caso se sustituyeron ambas por la misma constante c_1.

Consejo: reservar fórmulas con cuantificadores universales para cerrar ramas.

$\square$

En lo que sigue, consideraremos enunciados, esto es, fórmulas sin variables libres. Además supondremos, sin pérdida de generalidad, que el lenguaje L_σ tiene símbolos de constante (pues en caso contrario, podemos sustituir L_σ por L_σ^{Par}).

Ejemplo:

Sea la siguiente fórmula:

$$\varphi : (((\forall x\ (\forall y(<(x,y) \rightarrow <(+(x,c),+(y,c)))))\wedge <(c,+(c,c))) \rightarrow <(+(c,c),+(+(c,c),c)))$$

vamos a probar que es universalmente verdadera. Para demostrarlo construiremos el árbol de refutación para $\neg\varphi$ y veremos si conseguimos cerrar todas sus ramas:

$$\neg(((\forall x\ (\forall y\ (<(x,y) \rightarrow <(+(x,c),+(y,c)))))\wedge <(c,+(c,c))) \rightarrow <(+(c,c),+(+(c,c),c)))$$

$\boldsymbol{R}_{\neg\rightarrow}$:

$((\forall x\ (\forall y\ (<(x,y) \rightarrow <(+(x,c),+(y,c)))))\wedge <(c,+(c,c)))$ (1)

$\neg <(+(c,c),+(+(c,c),c))$

$\boldsymbol{R}_{\wedge}$ sobre (1):

$<(c,+(c,c)))$

$(\forall x\ (\forall y\ (<(x,y) \rightarrow <(+(x,c),+(y,c)))))$ (2)

$\boldsymbol{R}_{\forall}$ sobre (2) con (x/c):

$(\forall y\ (<(c,y) \rightarrow <(+(c,c),+(y,c))))$ (3)

$\boldsymbol{R}_{\forall}$ sobre (3) con $(y/+(c,c))$:

$(<(c,+(c,c)) \rightarrow <(+(c,c),+(+(c,c),c)))$ (4)

$\boldsymbol{R}_{\rightarrow}$ sobre (4):

$\neg <(c,+(c,c))$ $\times$ | $<(+(c,c),+(+(c,c),c))$ $\times$

Como ambas ramas se cierran la fórmula φ es universalmente válida. Claramente esto no se podría haber demostrado si no permitieramos sustituir x e y con cualquier término sin variables (en este caso por c y $+(c, c)$). $\square$

Importante: si se trabaja con lenguajes con igualdad deben adicionarse dos reglas más[1]:

$\boldsymbol{R_{t_1=t_2}}$	$\dfrac{t_1 = t_2}{\varphi(x/t_1) \to \varphi(x/t_2)}$	donde φ es una fórmula atómica cualquiera, y t_1 y t_2 son términos sin variables.
$\boldsymbol{R_{t=t}}$	$t = t$	donde t es un término sin variables.

Estas reglas ponen cosas verdaderas en el árbol si la premisa era verdadera en $\boldsymbol{R_{t_1=t_2}}$, y en $\boldsymbol{R_{t=t}}$ solo se agrega la conclusión.

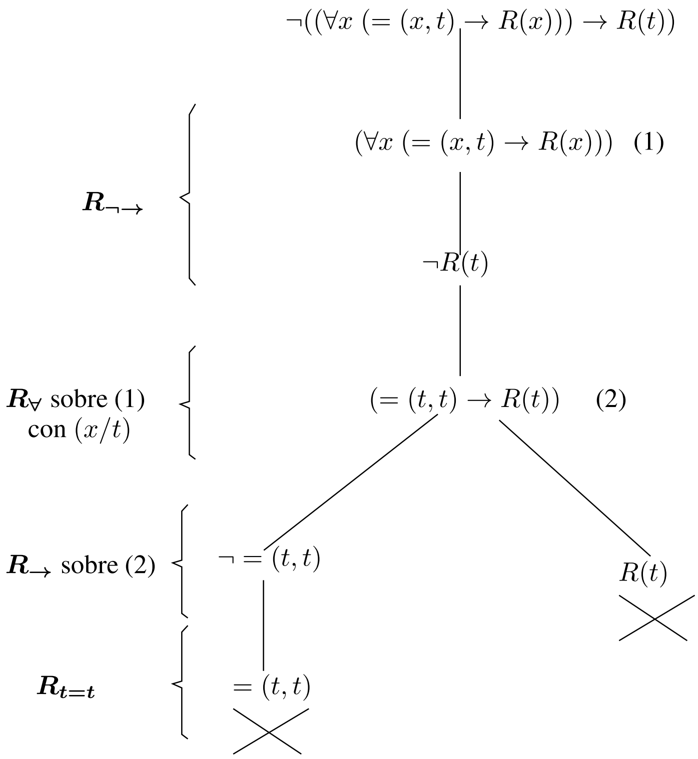
Observar que la regla $\boldsymbol{R_{t=t}}$ no necesita premisas para aplicarse, por lo tanto siempre se puede agregar, como único sucesor del nodo terminal de una rama de $\mathcal{A}$, un nuevo nodo al árbol conteniendo las conclusiones de la regla (o sea, $t = t$) para cualquier término t de L_σ^{Par} en el que no figuran variables.

Ejemplo:

Sea la siguiente *metafórmula*[2]:

$$\varphi : ((\forall x\ (=(x, t) \to R(x))) \to R(t))$$

siendo t un término sin variables cualquiera del lenguaje. Vamos a probar que φ es universalmente verdadera. Para demostrarlo construiremos el árbol de refutación para $\neg\varphi$ y veremos si conseguimos cerrar todas sus ramas:



Como ambas ramas se cierran la fórmula φ es universalmente válida. Claramente esto no se podría haber demostrado si no permitieramos sustituir x con cualquier término sin variables (en este caso por

[1] En las reglas se ha escrito el predicado "=" en notación infijo por simplicidad

[2] Hablamos de *metafórmula* porque podríamos tener distintas fórmulas dependiendo de cuál sea el término t elegido

t) y además si no hubieramos hecho uso de las nuevas reglas para la igualdad. $\square$

Teorema 2 *Sea L_σ un lenguaje de primer orden tal que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Todo conjunto saturado de enunciados de L_σ es satisfacible.*

Demostración: Vamos a definir una interpretación $\mathcal{I}$ del lenguaje L_σ con vocabulario σ (donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de símbolos de constante, $\mathcal{F}$ es el conjunto de símbolos de función y $\mathcal{P}$ es el conjunto de símbolos de predicado) del modo siguiente:

Como universo de la interpretación, $U^{\mathcal{I}}$, tomamos el conjunto de todos los términos sin variables del lenguaje L_σ. Notemos que este conjunto es no vacío, pues por hipótesis L_σ tiene por lo menos un símbolo de constante.

Para cada $c \in \mathcal{C}$, definimos $c^{\mathcal{I}} = c$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$, de aridad k, definimos $f^{\mathcal{I}} : U^{\mathcal{I}} \overbrace{\times \ldots \times}^{k-1 \text{ veces}} U^{\mathcal{I}} \longrightarrow U^{\mathcal{I}}$ como:

$$f^{\mathcal{I}}(t_1, \ldots, t_k) \in U^{\mathcal{I}}$$

para toda k-upla $(t_1, \ldots, t_k)$ de términos de L_σ sin variables.

Finalmente, para cada $P \in \mathcal{P}$, de aridad k, definimos:

$$P^{\mathcal{I}} = \{(t_1, \ldots, t_k) \in U^{\mathcal{I}} \overbrace{\times \ldots \times}^{k-1 \text{ veces}} U^{\mathcal{I}} \text{ tal que } P(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{H}\}$$

Sea β una asignación en $U^{\mathcal{I}}$. Esto es, para cada variable x, $\beta(x)$ es un término sin variables de L_σ.

Se verifica fácilmente que para todo término t sin variables, se tiene que $\mathcal{I}(t) = t$.

Para ver que $\mathbb{H}$ es satisfacible, bastará probar que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ para todo enunciado $\varphi \in \mathbb{H}$. Esta demostración la haremos por inducción en la complejidad de las fórmulas.

Supongamos que $\varphi \in \mathbb{H}$ y que $comp(\varphi) = 0$. Entonces φ es igual a $P(t_1, \ldots, t_k)$ para algún $P \in \mathcal{P}$. Como φ es un enunciado, ninguno de los términos t_i puede tener variables, y como $\varphi \in \mathbb{H}$, resulta que la definición de $P^{\mathcal{I}}$ que $(t_1, \ldots, t_k) \in P^{\mathcal{I}}$. Por lo tanto, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$.

Sea $n > 0$ y supongamos, como hipótesis inductiva, que hemos probado que $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ para todo enunciado $\psi \in \mathbb{H}$ tal que $comp(\psi) < n$.

Sea $\varphi \in \mathbb{H}$ con $comp(\varphi) = n$.

Si φ es igual a $(\psi \star \eta)$, con $\star$ uno de los conectivos $\vee$, $\wedge$ o $\rightarrow$, los mismos argumentos utilizados en la demostración del Lema 6 del apunte Lógica Proposicional sobre *La consecuencia lógica y la deducción*, nos permiten probar, a partir de las propiedades **H.3**, **H.5** y **H.7** de los conjuntos saturados, que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$.

Dejamos los detalles al cuidado del lector.

Si φ es $(\forall x\ \psi)$, entonces por la propiedad **H.9**, $\psi(x/t) \in \mathbb{H}$ para todo $t \in U^{\mathcal{I}}$. Como $comp(\psi(x/t)) < comp(\varphi) = n$, por la hipótesis inductiva se tiene que $V_{\mathcal{I}}(\psi(x/t)) = \top$, para todo $t \in U^{\mathcal{I}}$. Pero, $V_{\mathcal{I}}(\psi(x/t)) = V_{(\mathcal{A},\beta)}(\psi(x/t)) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(t))})}(\psi)$, y como t es un término sin variables $\mathcal{I}(t) = t$. Por lo tanto $V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(t))})} = \top$ para todo $t \in U^{\mathcal{I}}$, esto significa que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$.

Si φ es $(\exists x\ \psi)$, la demostración es similar, y la dejamos como ejercicio.

Nos falta considerar el caso que φ es $\neg\psi$. Como en el caso proposicional, debemos proceder por inducción sobre la complejidad de ψ.

Si $comp(\psi) = 0$, entonces ψ es $\neg P(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{H}$. Luego, por la propiedad **H.1**, $P(t_1, \ldots, t_k) \notin \mathbb{H}$, lo que implica que $(t_1, \ldots, t_k) \notin P^{\mathcal{I}}$. Como $\mathcal{I}(t_i) = t_i$, tenemos que $(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \notin P^{\mathcal{I}}$, lo que significa que $V_{\mathcal{I}}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \bot$. Por lo tanto, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \neg V_{\mathcal{I}}(P(t_1, \ldots, t_k) = \top$.

Sea $p > 0$ y supongamos que hemos probado que $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ para toda ψ tal que $comp(\psi) < p$.

Sea $comp(\psi) = p$. Si ψ es igual a $\neg\eta$ o si ψ es $(\eta \star \mu)$, con $\star$ uno de los conectivos $\vee$, $\wedge$ o $\rightarrow$, se prueba que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$ como en la demostración del Lema 6 del apunte Lógica Proposicional sobre *La consecuencia lógica y la deducción*, utilizando las propiedades **H.2**, **H.4**, **H.6** y **H.8**.

Si ψ es $(\forall x\ \eta)$, entonces φ es igual a $\neg(\forall x\ \eta) \in \mathbb{H}$, y por la propiedad **H.10**, $\neg\eta(x/c) \in \mathbb{H}$ para algún símbolo de constante c. Por la hipótesis inductiva, $V_{\mathcal{I}}(\neg\eta(x/c)) = \top$. Luego, obtenemos que $\bot = V_{\mathcal{I}}(\eta(x/c)) = V_{(\mathcal{A},\beta)}(\eta(x/c)) = V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(c))})}(\eta)$, y como $\mathcal{I}(c) = c$, resulta que $V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/\mathcal{I}(c))})}(\eta) = \bot$, esto implica que $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ \eta)) = \bot$, y, por consiguiente, que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$.

El caso en que ψ es igual a $(\exists x\ \eta)$ es similar, y dejamos su demostración a cargo del lector.

$\diamond$

El conjunto de los términos sin variables de un lenguaje L_σ, considerado en la demostración anterior como el universo de la interpretación, se conoce como *universo de Herbrand*.

Corolario 3 *Si un árbol de refutación del conjunto* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \mathbb{F}$ *tiene una rama saturada, entonces* Φ *es satisfacible.*

El corolario anterior no nos da un procedimiento efectivo para decidir si Φ es satisfacible, pues en general, una rama saturada puede ser infinita, y por lo tanto puede no ser obtenida en un número finito de pasos. Si en una rama aparece una fórmula del tipo $(\forall x\ \varphi)$ o $\neg(\exists x\ \varphi)$, y el universo de la interpretación es infinito, las reglas que las tienen como premisas pueden ser utilizadas múltiples veces con distintos términos sustituyendo a x. Esto hace difícil que se llegue a saturar esa rama, ya que hay infinitos términos. En el caso de que el universo de la interpretación sea finito, y se coloquen el la rama que contiene alguna de las fórmulas antes mencionadas, todas las conclusiones necesarias (dependiendo de si φ es tipo A o B), esta rama será saturada y en ese caso si se podrá afirmar que la fórmula raíz del árbol es satisfacible. Lo mismo sucede si en **ninguna** de las ramas del árbol aparecen fórmulas del tipo $(\forall x\ \varphi)$ o $\neg(\exists x\ \varphi)$, en este caso todas las fórmulas del árbol tendrán sus conclusiones en sus ramas, por lo cual podrán saturarse, lo que implica que podrá afirmarse si la fórmula de la raíz es satisfacible o no.

Luego, si un árbol de refutación de Φ se cierra, estamos seguros de que Φ es insatisfacible. Pero para ver que Φ es satisfacible, debemos probar que tiene una rama saturada (y por lo tanto, que nunca se puede cerrar), y no siempre hay una receta para hacer este tipo de demostraciones.

Esto marca una diferencia esencial con la Lógica Proposicional, pues en ese caso el método de los árboles siempre nos permite decidir, en forma puramente mecánica, si un conjunto finito de fórmulas proposicionales es o no satisfacible. Lo mismo puede suceder con el árbol de refutación de una fórmula φ, si el árbol de su negación $(\neg\varphi)$ es cerrado, entonces φ es universalmente válida (equivalente a una tautología) pero si no podemos cerrarlo ni saturar sus ramas, no se podrá sacar ninguna conclusión sobre φ. Es decir que este método no siempre es efectivo en la Lógica de Predicados.

3. Propiedades de los sistemas de Deducción de la Lógica de Predicados

En el apunte Sistemas de Deducción, de la Lógica Proposicional, se vio que los sistemas de demostración estudiados para la lógica proposicional cumplen las tres propiedades de *completitud*, *corrección* y *decidibilidad*. Vamos a analizar qué pasa con esas propiedades en la Lógica de Predicados.

Existen varios sistemas de demostración en Lógica de Predicados que son completos y correctos (la completitud fue demostrada por Gödel en 1930). Sin embargo, no existe ningún sistema de demostración en lógica de primer orden que sea decidible. El método que acabamos de analizar es una prueba de eso.

El siguiente teorema asegura que la coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema 3 *Una fórmula del lenguaje L_σ es universalmente válida, en teoría interpretativa, si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.*

Recordando las definiciones vistas para la Lógica Proposicional, se dice que un sistema de demostración axiomático es *completo* si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida (universalmente válida)y deducir cualquier consecuencia lógica. Por tanto, el teorema anterior (Teorema 3) tiene como consecuencia la ***completitud*** de la lógica de predicados. Se a visto que si la fórmula φ en universalmente válida se puede obtener su deducción con el método de los árboles de refutación.

Por otro lado, se dice que un sistema de demostración es *correcto* (coherente) si todas las fórmulas demostrables en el sistema son semánticamente válidas y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas. El teorema anterior (Teorema 3) tiene como consecuencia también la ***corrección*** de la lógica de predicados. Como se vio al estudiar los árboles de refutación, el obtener un árbol cerrado de $\neg\varphi$ constituye una deducción de φ y permite asegurar que dicha fórmula es universalmente válida, dado que su negación es insatisfacible. De igual nodo este método permite obtener una deducción de $\Phi \cup \{\neg\psi\}$, con Φ un conjunto de fórmulas bien formadas y ψ una fórmula todas de L_σ, lo que permite afirmar que ψ es consecuencia de Φ.

Finalmente, se dice que un sistema de demostración es *decidible* si proporciona un procedimiento general y finito, es decir, aplicable a cualquier fórmula y que termine, que permita decidir si una fórmula es universalmente válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas. No existe ningún sistema de demostración en lógica de primer orden que sea decidible; Alonzo Church demostró en 1936 que no existe ningún algoritmo que permita decidir si una fórmula cualquiera de la lógica de primer orden es o no es universalmente válida, es decir, la validez de fórmulas en lógica de primer orden es un problema ***indecidible***. Recordar que este mismo problema en lógica de proposiciones sí es decidible: en este caso, para saber si una fórmula es válida basta con realizar su tabla de verdad.

Aunque la validez de las fórmulas en la Lógica de predicados no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- Cuando se consideran exclusivamente dominios finitos.
- Cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos, es decir de aridad uno.
- Incluso en el caso de dominios infinitos y predicados poliádicos, existen algunas clases particulares de fórmulas para las que su validez sí es decidible.

Por otro lado, la validez de las fórmulas en lógica de primer orden, aunque indecidible, puede verse como un problema semi-decidible si se considera que existen sistemas de demostración, como el de los árboles de refutación, tales que:

- Si una fórmula es válida, son capaces de demostrar que lo es.
- Para fórmulas no válidas, el proceso puede no terminar nunca.

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base el Apunte de *Árboles de Refutación* del **Dr. Roberto Cignoli** de la Universidad de Buenos Aires y notas de clase del *Curso de Lógica y Computación* dictado por el **Dr. Guillermo Martínez** en la Universidad Nacional de San Luis.