LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

LÓGICA PROPOSICIONAL

SISTEMAS DEDUCTIVOS

UNSL

- Estudiamos el método de los *Árboles de Refutación* y el método de la *Tablas de Verdad* como métodos para verificar la validez de fórmulas y deducciones.

La *teoría de la demostración* o *teoría de pruebas* proporciona métodos alternativos para averiguar:

- *La validez de una fórmula proposicional*: si P es una fórmula válida se dice que es ***demostrable*** y se escribe: $\vdash P$.

- *Si una fórmula P es consecuencia lógica de un conjunto de premisas S* : si P es consecuencia lógica de S se dice que P es ***deducible*** en el sistema a partir de S y se escribe: $S \vdash P$.

- En un sistema *deductivo* o *de demostración* se utiliza una secuencia *finita* de pasos y, en cada uno de ellos, se aplican las *reglas de inferencia* del sistema para demostrar la validez de una fórmula o de una deducción.

- Un sistema deductivo o de demostración puede ser *directo* o *indirecto* (por *refutación*).

  - *Sistemas directos:* aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.

  - *Sistemas de demostración indirectos* (o por *refutación*): aplican la técnica de reducción al absurdo.

- *Sistemas directos:* aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.
  - Son los más naturales.
  - Son adaptables a lógicas no clásicas.
  - Son de difícil automatización.

Tablas de Verdad

- *Sistemas indirectos* (por *refutación*): aplican la técnica de reducción al absurdo para demostrar una fórmula.
  - Son más modernos
  - Son adecuados para su automatización
  - No son aplicables a lógicas distintas de las lógicas clásicas.

Árboles de Refutación

- A los sistemas deductivos también se los llama *axiomáticos*, porque la mayoría se basan en *axiomas*.
- *Axiomas:* definen las propiedades básicas de los objetos de la teoría estudiada, y se consideran *verdaderas*, aunque *no* se demuestran.
- Los axiomas de toda teoría tienen que ser:
  - *Compatibles*: a partir de ellos *no debe ser posible* deducir una contradicción.
  - *Independientes*: ningún axioma se debe poder deducir a partir del resto de ellos (habría redundancia de axiomas)
  - *Suficientes*: a partir de ellos debe ser posible deducir todas las propiedades que necesitamos.

- Para especificar un *sistema de demostración formal S*, se requieren:

1. *A*: un *alfabeto* de símbolos, conjunto de símbolos que se pueden utilizar para expresar algo.

2. *F*: un conjunto de *reglas de sintaxis* que permiten generar secuencias *finitas* de símbolos llamadas *fórmulas bien formadas*.

3. *X*: un conjunto de fórmulas bien formadas llamadas *axiomas*, las cuales son válidas por definición.

4. *R*: un conjunto *finito* de *reglas de deducción*, son reglas de transformación que permiten *inferir* una fórmula (*conclusión*) a partir de un conjunto de fórmulas (*condiciones o premisas*).

$$S = (A, F, X, R)$$

- Una *demostración* de la *fbf* P en el sistema S es una *sucesión finita* de *fbfs*:

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$$

tal que para todo i, $1 \leq i \leq n$,

  - Q_i es un axioma de S, o un teorema ya demostrado.
  - Q_i se obtiene aplicando alguna regla de deducción a miembros anteriores de la sucesión Q_j, con $j < i$.
  - El último elemento de la sucesión es la fórmula P ($Q_n = P$)

- Entonces decimos que:

  - La sucesión de *fbfs* es una *demostración* de P en S.
  - P es un *teorema* de S .

- Entonces, una fórmula P es un *teorema* si se obtiene a partir de una demostración. Por lo tanto:
  - P es un axioma de S.
  - P se se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencia a otros teoremas.
- Si P es un teorema decimos que es *válida*, es *demostrable* y formalmente se escribe:

$$\vdash P$$

Ejemplo:

$\{P\} \models Q$ *si solo si* $(P \rightarrow Q)$ es una tautología, entonces en un sistema deductivo se escribe:

$$\vdash (P \rightarrow Q)$$

Sea T un conjunto de *fbfs* de S (pueden ser axiomas, teoremas o *fbfs*).

- Llamaremos *deducción* de P en S a partir de T, a la sucesión finita de *fbfs* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ tal que para todo i, $1 \leq i \leq n$, se verifica alguna de las siguientes condiciones:
  - Q_i es un axioma de S o un teorema ya demostrado.
  - Q_i es una *premisa*, es decir un elemento de T.
  - Q_i se deduce de miembros anteriores de la sucesión Q_j (j < i) como consecuencia directa de aplicar reglas de deducción a los mismos.
    - El último elemento de la sucesión *es la fórmula* P ($Q_n = P$)
- Entonces decimos que:

P es *deducible* en S a partir de T

- Entonces, si una fórmula P es *deducible* a partir del conjunto T, diremos que:

P es la *conclusión* del conjunto de las *premisas* T

- Si P es la conclusión de una *deducción* a partir de las premisas T formalmente se escribe:

$$T \vdash P$$

Ejemplo:

$\{P\} \models Q$ *si solo si* $(P \rightarrow Q)$ es una tautología, entonces en un sistema deductivo se escribe:

$$\{P\} \vdash Q$$

Observaciones:

- Una *demostración* es una deducción a partir del conjunto $\varnothing$.
- En una *deducción*, las *fbfs* de T son consideradas temporalmente válidas.

En símbolos:

$T \vdash_S P$ significa que P es *deducible* a partir de T en S

$\varnothing \vdash_S P$ significa que P es *teorema* de S

- *Teorema de la Deducción* (***forma sintáctica***)

$$T \cup \{P\} \vdash_S Q \quad \textit{si y solo si} \quad T \vdash_S (P \rightarrow Q)$$

siendo P y Q *fbfs* de S y T un conjunto de *fbfs* de S .

Es decir que si $T = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$

Entonces $T \cup \{P\} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P\}$, luego

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P\} \vdash_S Q \quad \textit{si y solo si} \quad \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \vdash_S (P \rightarrow Q)$$

El siguiente corolario del teorema de la deducción establece la relación buscada entre demostraciones de teoremas y deducciones.

⌘ Corolario

Dada una deducción, es siempre posible encontrar una *fórmula válida* (teorema) que la represente.

Demostración: Si $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \vdash_S P$ es la deducción de P, se aplica el *teorema de la deducción* sucesivamente hasta que el conjunto de premisas sea vacío. Se obtiene así la siguiente cadena de fórmulas que tiene como último elemento un teorema:

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}\} \vdash_S (Q_n \to P)$$

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}\} \vdash_S (Q_{n\text{-}1} \to (Q_n \to P))$$

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-3}\} \vdash_S ((Q_{n\text{-}2} \to (Q_{n\text{-}1} \to (Q_n \to P)))$$

$$\vdots$$

$$\vdash_S (Q_1 \to (Q_2 \to (Q_3 \to (\ldots \to (Q_n \to P))\ldots))$$

Ejemplo

Supongamos las proposiciones: p= *como demasiado* y q= *me duele el estómago y* la argumentación que se quiere demostrar es:

$$\vdash_S ((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$$

El teorema de la deducción implica que, en un sistema de pruebas, demostrar lo anterior es equivalente a demostrar la deducción:

$$\{(p \to q)\} \vdash_S (\neg q \to \neg p)$$

O también:

$$\{(p \to q), \neg q\} \vdash_S \neg p$$

Esta última deducción se lee "*si como demasiado me duele el estómago y si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado*".

- El sistema deductivo que vamos a estudiar está basado en el *Sistema deductivo de Gentzen*.
- Antes debemos definir:
  - Una *subdeducción*, informalmente, es la derivación de una conclusión Q a partir de una *premisa auxiliar* (o hipótesis) P, dentro del proceso de una deducción (la demostración madre o principal).
  - Después de obtener la conclusión buscada en la subdeducción, se remueve la subdeducción de la demostración madre y se sustituye por el resultado $P \vdash Q$.
  - Para representar subdeducciónes usaremos la *notación de Fitting*. Esta notación emplea rectángulos, llamados *cajas*, en la primera fila de una caja se pone la premisa auxiliar P, mientras en la última fila se encuentra la conclusión Q.

Ejemplo de subdeducción usando la *notación de Fitting*

1. P_1 (Premisa)
2. P_2 (Premisa)
3. $\vdash P_2$ (R1(1): regla R1 aplicada a P_2)

4. R_1 (Premisa auxiliar)
5. $\vdash R_2$ (R2(2,4): regla R2 aplicada a P_2 y R_1)
6. $\vdash R_3$ (R3(5): regla R3 aplicada a R_2)

7. $\vdash P_4$ (R4(4,6): regla R4 aplicada a la subdeducción)

- El *Sistema de Deducción Natural (DN)* fue propuesto por Gerald Gentzen en 1934.
- Se basa en deducciones y tiene varias reglas de inferencia y ningún axioma.
- Las reglas de inferencia son dos para cada conectivo lógico del alfabeto:
  - una de *introducción* del conectivo.
  - una de *eliminación* del conectivo.
- Permiten hacer suposiciones adicionales (abrir líneas argumentales adicionales) que cuando se cierran, aportan algo al flujo argumental principal.

- Formalmente el *Sistema de Deducción Natural* se define como:

$$S = (A, F, X, R)$$

1- El alfabeto de símbolos: $\mathbf{A} = \{ p_i, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, (,) \}$

- Símbolos de proposiciones $p_1, p_2, p_3 \ldots$ $(p, q, r, s, t, \ldots)$
- Símbolos de conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- Símbolos de paréntesis (,).

2- El conjunto de ***fórmulas bien formadas*** (*fbf*) ***F***:

- Las variables proposicionales son *fbfs*.
- Si P es una *fbf*, entonces $(\neg P)$ es una *fbf*.
- Si P, Q son *fbfs*, entonces $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ y $(P \leftarrow Q)$ son *fbfs*.

⌘ Toda *fbf* se obtiene mediante las tres reglas anteriores

NOTA: En adelante usaremos el conectivo bicondicional entre dos fórmulas ($P \leftrightarrow Q$). Este conectivo se entenderá como una forma abreviada de la fórmula bien formada $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

3- El conjunto de ***Axiomas, X,*** es vacío.

4- El conjunto de ***reglas de deducción*** (o de inferencia) ***R,*** está compuesto por las reglas de ***introducción*** y de ***eliminación*** para cada conectivo.

(I∧) Introducción de la conjunción.

(I∨) Introducción de la disyunción.

(I¬) Introducción de la negación.

(I→) Introducción de la implicación.

(E∧) Eliminación de la conjunción.

(E∨) Eliminación de la disyunción.

(E¬) Eliminación de la negación.

(E→) Eliminación de la implicación.

4- Conjunto R de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$) Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{P \quad Q}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P, Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

Ejemplos:

$$\frac{\textit{hoy es viernes} \quad \textit{son las cinco}}{\textit{hoy es viernes y son las cinco}}$$

$$\frac{(p \rightarrow q) \quad (r \vee \neg p)}{((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))}$$

4- Conjunto R de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$) Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P, Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

Ejemplos:

n	$(p \rightarrow q)$	
m	$(r \vee \neg p)$	
k	$((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))$	$I \wedge n,m$
i	$((r \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow q))$	$I \wedge m,n$
j	$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q))$	$I \wedge n,n$

4- Conjunto R de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$) Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P, Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

$E \wedge$) Regla de ***eliminación de la conjunción:***

$$\frac{(P \wedge Q)}{P} \qquad \frac{(P \wedge Q)}{Q}$$

De la conjunción de dos fórmulas se deducen *las dos fórmulas*.

Ejemplo:

$$\frac{((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))}{(p \rightarrow q)}$$

$\{(P \wedge Q)\} \vdash P$ (eliminación derecha)

$\{(P \wedge Q)\} \vdash Q$ (eliminación izquierda)

Ejemplo:

Usemos las dos reglas definidas para demostrar:

$$\{(p \wedge (q \wedge r))\} \vdash (p \wedge r)$$

1) $(p \wedge (q \wedge r))$ (Premisa)

$n)$ $(p \wedge r)$

Comenzamos escribiendo la premisa y, dejando un espacio vacío, escribimos la conclusión.

- Construir la prueba consiste en llenar la brecha entre las premisas y la conclusión, aplicando la secuencia adecuada de reglas de inferencia.

Ejemplo:

Demostrar usando sólo las dos reglas anteriores:

$$\{(p \wedge (q \wedge r))\} \vdash (p \wedge r)$$

1)	$(p \wedge (q \wedge r))$	(Premisa)
2)	p	(E∧(1))
3)	$(q \wedge r)$	(E∧(1))
4)	r	(E∧(3))
5)	$(p \wedge r)$	(I∧(2,4))

1)	$(p \wedge (q \wedge r))$
2)	$\vdash p$
3)	$\vdash (q \wedge r)$
4)	$\vdash r$
5)	$\vdash (p \wedge r)$

$I\neg$) Regla de *introducción de la negación:*

$$\frac{(P \to Q) \quad (P \to \neg Q)}{\neg P}$$

Esta regla se usa en *demostraciones por reducción al absurdo* de la validez de una fórmula $\neg P$

$$\{(P \to Q), (P \to \neg Q)\} \vdash \neg P$$

1. Se introduce la premisa auxiliar P .
2. Si de esta premisa podemos deducir la validez de una contradicción $(Q \wedge \neg Q)$, entonces podemos armar la validez de $\neg P$.

I¬) Regla de ***introducción de la negación:*** Con la notación de *Fitting* (*I*¬) se representa como:

1) P (Premisa auxiliar)

$\vdots$

$(Q \wedge \neg Q)$

$\neg P$

E¬) Regla de ***eliminación de la doble negación:***

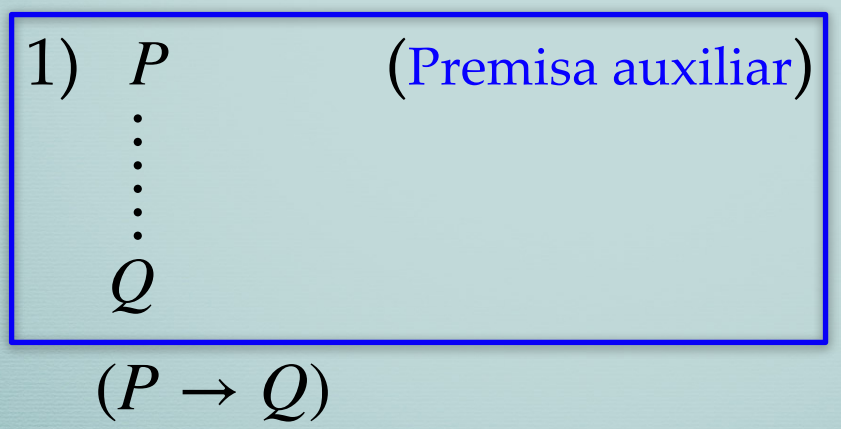
$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Esta regla es bien conocida.

$I \rightarrow$) Regla de *introducción de la implicación:*

Para definir esta regla:

1. Se introduce la premisa auxiliar P .
2. Si se demuestra que de P se deduce una fórmula Q, entonces se ha demostrado la validez de $(P \rightarrow Q)$.



Esta regla es una versión del ***Teorema de la Deducción***

⌘ Lo que se deduce a partir de P, en el ámbito de su caja, se *garantiza verdadero* en tanto que P lo sea, entonces $(P \rightarrow Q)$ también lo es.

$E \rightarrow$) Regla de ***eliminación de la implicación:***

$$\frac{(P \rightarrow Q) \quad P}{Q}$$

Esta regla tiene nombre propio, es mejor conocida como *Modus Ponens*

$$\{(P \rightarrow Q), P\} \vdash Q$$

Ejemplos:

$$\frac{\textit{si presiono entonces se rompe} \quad \textit{presiono}}{\textit{se rompe}}$$

$$\frac{((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \quad (P \vee Q)}{(P \rightarrow R)}$$

Ejemplos:

Para demostrar $\{(P \rightarrow Q), \neg Q\} \vdash \neg P$ podemos escribir la siguiente deducción:

1)	$(P \rightarrow Q)$	(Premisa)
2)	$\neg Q$	(Premisa)
3)	P	(Premisa auxiliar)
4)	Q	(E $\rightarrow$ 1, 3)
5)	$\neg Q$	
6)	$(Q \wedge \neg Q)$	(I $\wedge$ 5, 2)
7)	$\neg P$	(I $\neg$ 3, 6)

$I \vee$) Regla de *introducción de la disyunción:*

$$\frac{P}{(P \vee Q)} \qquad \frac{Q}{(P \vee Q)}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir *de cada una de ellas*.

$\{P\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción derecha)

$\{Q\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción izquierda)

Ejemplos:

$$\frac{llueve}{lueve \;\; o \;\; hay \;\; viento}$$

$$\frac{(p \to q)}{(p \to q) \vee (r \to \neg p))}$$

$$\frac{(p \to q)}{(r \to \neg p) \vee (p \to q))}$$

$I \vee$) Regla de *introducción de la disyunción:*

$$\frac{P}{(P \vee Q)} \qquad \frac{Q}{(P \vee Q)}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir *de cada una de ellas*.

$\{P\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción derecha)

$\{Q\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción izquierda)

$E \vee$) Regla de *eliminación de la disyunción:*

$$\frac{\begin{array}{c}(P \vee Q) \\ (P \to R) \\ (Q \to R)\end{array}}{R}$$

Esta regla se usa en el método de *demostración por casos.*

$\{(P \vee Q), (P \to R), (Q \to R)\} \vdash R$

$E \vee$) Regla de ***eliminación de la disyunción:*** Esta regla se usa en el método de demostración por casos, que se aplica cuando se quiere demostrar una deducción del tipo $(P \vee Q) \vdash R$.

1. Se introducen las premisas auxiliares P y Q.
2. Usando las dos premisas auxiliares se intentan demostrar dos subdeducciones independientes con igual conclusión, R.

$$P \vdash R \qquad\qquad Q \vdash R$$
$$P \to R \qquad\qquad Q \to R$$

3. Si se ha completado el paso anterior, se usan las subdeducciones obtenidas en la deducción madre y se obtiene que

$$\{(P \vee Q), (P \to R), (Q \to R)\} \vdash R$$

E ∨) Regla de ***eliminación de la disyunción:*** con la notación de *Fitting* (*E*∨) se representa como:

1) $(P \vee Q)$ (Premisa)

2) P (Premisa auxiliar)

$\vdots$

R

$P \rightarrow R$

2) Q (Premisa auxiliar)

$\vdots$

R

$Q \rightarrow R$

R

⌘ En este caso, de la disyunción $(P \vee Q)$ se deduce R, con el auxilio de los dos *argumentos opcionales* mencionados: P y Q

E* ∨)** Regla de ***eliminación de la disyunción: con la notación de *Fitting* (E∨) se representa como:

1) $(P \vee Q)$ (Premisa)

2) P (Premisa auxiliar)

⋮

R

2) Q (Premisa auxiliar)

⋮

R

R

⌘ En este caso, de la disyunción $(P \vee Q)$ se deduce R, con el auxilio de los dos *argumentos opcionales* mencionados: P y Q

El sistema de Gentzen está ahora completamente definido.

Ejemplos:

Demostrar la propiedad distributiva de la conjunción.

$$\{(p \wedge (q \vee r))\} \vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

1) $(p \wedge (q \vee r))$ (Premisa)
2) p (E∧ (1))
3) $(q \vee r)$ (E∧ (1))

4) q (Premisa aux.)	r (Premisa aux.)
5) $(p \wedge q)$ (I∧(2,4))	$(p \wedge r)$ (I∧(2,4))
6) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (I∨(5))	$((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (I∨(5))

7) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (E∨(3 (4,5)))

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $\{P\} \vdash (Q \rightarrow P)$ puede hacerse usando la introducción de la implicación:

1)	P	Premisa
2)	Q	Premisa auxiliar
3)	P	1
4)	$(Q \rightarrow P)$	I$\rightarrow$ 2, 3

Para demostrar $\vdash (p \rightarrow (p \vee q)$ puede hacerse:

1)	p	Premisa auxiliar
2)	$(p \vee q)$	I$\vee$ 1
3)	$(p \rightarrow (p \vee q))$	I$\rightarrow$ 1, 2

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $((p \wedge q) \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$:

1)	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	premisa
2)	p	premisa auxiliar
3)	q	premisa auxiliar
4)	$(p \wedge q)$	I$\wedge$ 2, 3
5)	r	E$\rightarrow$ 1
6)	$(q \rightarrow r)$	I$\rightarrow$ 3, 5
7)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	I$\rightarrow$ 2, 6

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $\{(P \rightarrow Q), (P \rightarrow (Q \rightarrow R))\} \vdash (P \rightarrow R)$:

1)	$(P \rightarrow Q)$	Premisa
2)	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	Premisa
3)	P	Premisa auxiliar
4)	Q	E $\rightarrow$ 1, 3
5)	$(Q \rightarrow R)$	E $\rightarrow$ 2, 3
6)	R	E $\rightarrow$ 5, 4
7)	$(P \rightarrow R)$	I $\rightarrow$ 3, 6

Cosas Incorrectas:

- Vamos a ver algunas operaciones que NO pueden realizarse durante una deducción utilizando el sistema de *DN*.

- **No podemos *suponer premisas auxiliares* que *contradigan* fórmulas ya demostradas, en pasos anteriores, o premisas dadas.**

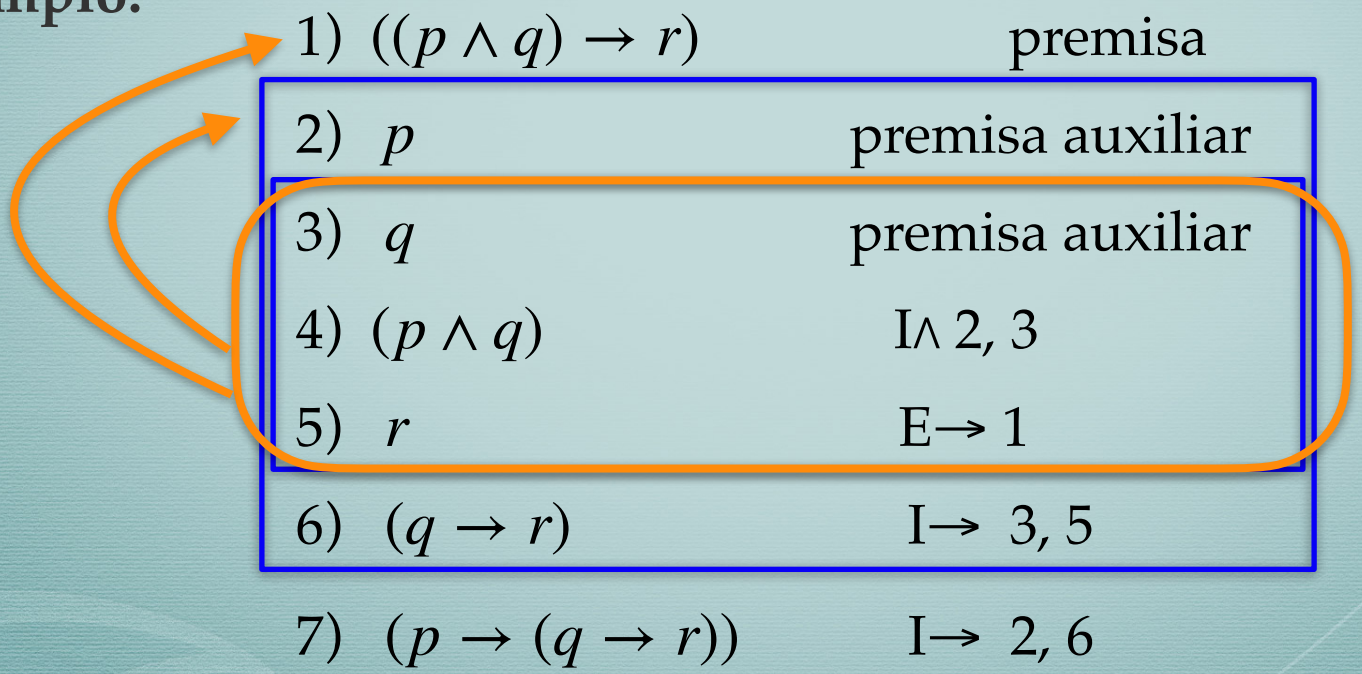
Ejemplo:

1)	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	premisa
2)	$(p \wedge q)$	premisa
3)	r	E→ 1,2
4)	$\neg r$	premisa auxiliar

Cosas Incorrectas:

- **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

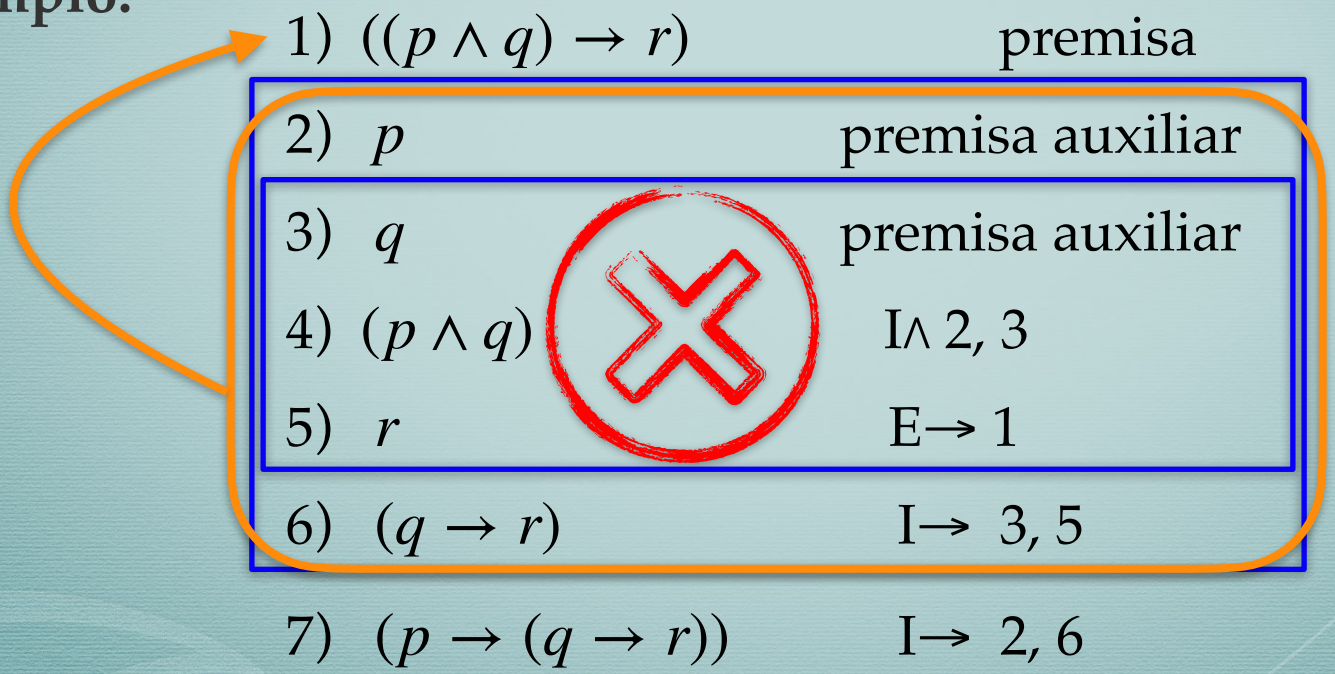
Ejemplo:



Cosas Incorrectas:

- **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

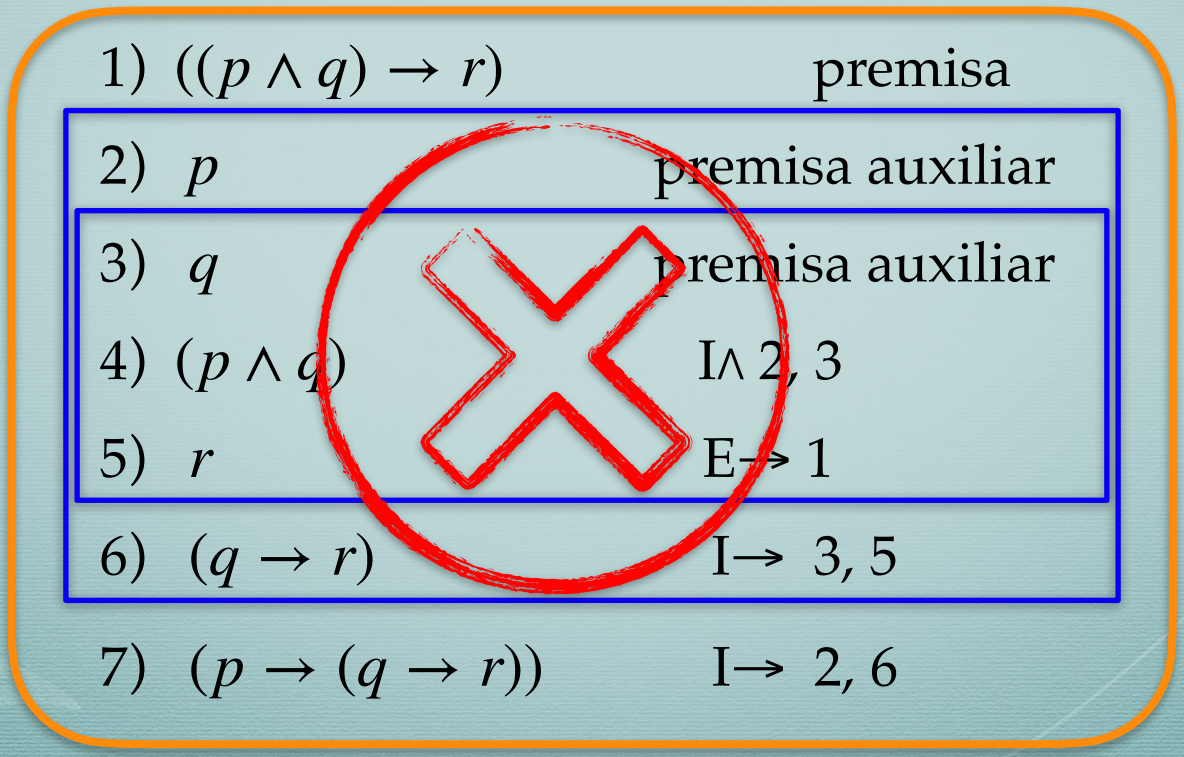
Ejemplo:



Cosas Incorrectas:

- **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

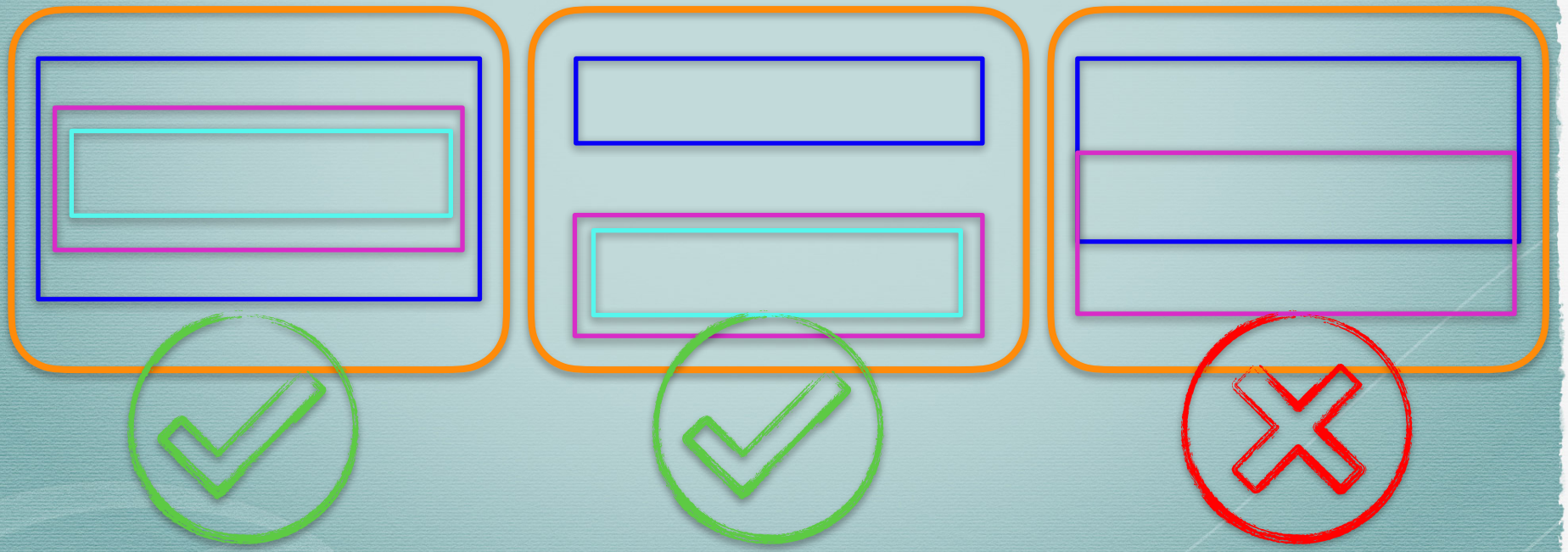
Ejemplo:



Cosas Incorrectas:

- **NO se pueden *solapar* cajas de *Fitting*.**

Ejemplo:



Cosas Incorrectas:

⌘ **No se puede acabar la deducción *dentro de una sub demostración*. La última línea debe estar fuera de todas las cajas de *Fitting*.**

Ejemplo: Se quiere demostrar $\vdash (P \wedge Q)$

1) P	premisa auxiliar
2) Q	premisa auxiliar
3) $(P \wedge Q)$	I$\wedge$ 2, 3

⌘ En este caso, lo que está *dentro* de la sub demostración solo se cumple si se cumple la hipótesis o suposición, pero NO *siempre*.

Cosas Incorrectas:

- **No se puede saltar pasos.**

Ejemplo: Se quiere escribir la negación de $\neg P$, no podemos poner directamente P.

1) $\neg P$
⋮
i) contradicción
i+1) P

1) $\neg P$
⋮
i) contradicción
i+1) $\neg\neg P$
i+2) P E¬ i+1

- **No se puede pasar de $\neg(P \vee Q)$ a $(\neg P \wedge \neg Q)$ *en un solo paso*, pues no hay ninguna regla que lo permita.**

- Como en cualquier otro sistema deductivo, *la obtención de teoremas define nuevas reglas*, que reciben el nombre de ***reglas derivadas***.
- Estas reglas pueden usarse en cualquier momento, como si fueran parte de sistema.
- Por ejemplo, lo demostrado anteriormente: $\{(P \rightarrow Q), \neg Q\} \vdash \neg P$

1)	$(P \rightarrow Q)$	(Premisa)
2)	$\neg Q$	(Premisa)
3)	P	(Premisa auxiliar)
4)	Q	(E $\rightarrow$ 1, 4)
5)	$(Q \wedge \neg Q)$	(I $\wedge$ 5, 2)
6)	$\neg P$	(I $\neg$ 4, 6)

Se conoce como la regla del ***Modus Tollens***

- Esta derivación se puede producir en cualquier punto de un argumento, no es necesario que las dos primeras fórmulas sean las premisas.

- De hecho, si desde un cierto punto del argumento se pueden utilizar dos fórmulas como la $(P \to Q)$ y la $\neg Q$ (estén donde estén, mientras sean formalmente accesibles), ya se sabe que se puede derivar la fórmula $\neg P$, repitiendo exactamente esos pasos.

- Entonces solo se utiliza como una regla más del sistema, en la justificándola como ***regla derivada***, en ese caso del ***Modus Tollens***.

$$\frac{(P \to Q) \quad \neg Q}{\neg P}$$

Regla del
Modus Tollens

⌘ De la misma forma se pueden deducir la regla del ***Silogismo Hipotético,*** que podremos usar como regla derivada.

$$\frac{(P \to Q)\quad (Q \to R)}{(P \to R)}$$

Regla del ***SH***

⌘ La regla de ***ECQ*** (*Ex contradictione quodlibet*) de una contradicción, cualquier cosa, nos dice que si en el curso de una deducción somos capaces de encontrarnos con una contradicción (A y $\neg A$), entonces en la línea siguiente podemos poner *cualquier fbf*.

$$\frac{P\quad \neg P}{R}$$

Regla ***ECQ***

Ejemplo:

$$\frac{(p \to q)\quad \neg(p \to q)}{(p \vee (r \to \neg p))}$$

- Otra regla que se considera entre las derivadas es la ***PBC*** (*Proof by Absurdity*) es decir la regla de *reducción al absurdo*.

- Esta regla consiste en considerar a la *negación* de la fórmula que se quiere demostrar, como *premisa auxiliar* y desde allí llegar a una *contradicción*.

Ejemplo: $\{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), \neg R\} \vdash \neg(P \wedge Q)$

1)	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	(Premisa)
2)	$\neg R$	(Premisa)
3)	$(P \wedge Q)$	(Premisa auxiliar)
4)	P	(E $\wedge$ 3)
5)	Q	(E $\wedge$ 3)
6)	$(Q \rightarrow R)$	(E$\rightarrow$ 1,4)
7)	R	(E$\rightarrow$6, 5)
8)	$(R \wedge \neg R)$	(I $\wedge$ 2, 7)
9)	$\neg(P \wedge Q)$	(I $\neg$ 3,8)

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.
- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.
- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.

$\{P, Q\} \vdash (\neg Q \to \neg P)$ podemos pasar a $\{P\} \vdash (Q \to (\neg Q \to \neg P))$

$\vdash ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$ podemos pasar a $\{(P \to Q)\} \vdash (\neg Q \to \neg P)$

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.
- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.
- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.
- Además, si se puede demostrar una equivalencia, por ejemplo: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$, podemos asegurar que :

$$(P \rightarrow Q) \vdash (\neg P \vee Q) \qquad \text{y además} \qquad (\neg P \vee Q) \vdash (P \rightarrow Q)$$

- Esto es algo que también puede usarse en una demostración o en una deducción.

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.
- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.
- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.
- Además, si se puede demostrar una equivalencia, por ejemplo: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$, podemos asegurar que :

$$(P \rightarrow Q) \vdash (\neg P \vee Q) \quad \text{y además} \quad (\neg P \vee Q) \vdash (P \rightarrow Q)$$

Pero NO SIRVE para demostrar que una suposición es *inválida*

Conclusiones:

- Una fórmula P es ***deducible*** a partir de T, $T \subseteq$ **Form**, si existe una deducción de P a partir de T.

  P es una *deducción* de T y se denota: $T \vdash P$

  Si $T = \emptyset$

  P es un *teorema* y se denota: $\emptyset \vdash P$ o $\vdash P$

- El conjunto de las fórmulas *deducibles* a partir de $T \subseteq$ **Form** será denotado por $Ded(T)$.

Observación: $Ded(\emptyset)$ es el conjunto de los *Teoremas*

Relación entre semántica y sintaxis

- Es posible demostrar que estos sistemas axiomáticos son equivalentes a la teoría interpretativa.

- Se puede verificar que una fórmula proposicional es una tautología en la teoría interpretativa si y sólo si es una fórmula válida en la teoría de la demostración.

- Teorema de la Corrección:

  Todo teorema en el sistema deductivo DN es una Tautología

- Teorema de la Adecuación:

  Si P es una fbf y es una tautología, entonces P es un teorema en sistema deductivo DN

Relación entre semántica y sintaxis

- Si la secuencia $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = P$ es una deducción de P a partir del conjunto T ($T \vdash P$), se dice que la conclusión es ***consecuencia lógica*** del conjunto de las premisas y se escribe:

$$T \models P$$

- Observar que la demostración de un teorema es una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.

$$\emptyset \vdash P$$

- Por lo tanto, si P es *consecuencia lógica* del conjunto vacío, se puede asegurar que P es *tautología*.

$$\emptyset \models P$$

Relación entre semántica y sintaxis

- Sabemos que P es un teorema si:

$$\varnothing \vdash P$$

Entonces $P \in$ Ded $(\varnothing)$

- Además que P es una tautología si:

$$\varnothing \models P$$

Entonces $P \in$ Con $(\varnothing)$

$$\text{Ded}(\varnothing) = \text{Con}(\varnothing)$$

Todo Teorema es una Tautología

Toda Tautología es un Teorema

Completitud, Corrección y Decidibilidad

- Para cualquier sistema axiomático es imprescindible estudiar si éste cumple las tres propiedades de *completitud*, *corrección* y *decidibilidad*.

- Completitud: un sistema de demostración es *completo* si es capaz de demostrar cualquier fórmula que sea una tautología y deducir cualquier consecuencia lógica.

El sistema de DN y los AR son completos

- Corrección: un sistema de demostración es *correcto* (consistente, coherente) si todas las fórmulas demostrables en él son tautologías y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

El sistema de DN y los AR son correctos

Completitud, Corrección y Decidibilidad

- Decidibilidad: un sistema de demostración es *decidible* si proporciona un procedimiento aplicable a cualquier fórmula y que termine, que permita decidir si una fórmula es tautología o es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas.

- Las Tablas de Verdad, los Árboles de Refutación y las demostraciones en el *SN* son métodos efectivos y finitos que permiten determinar si una fórmula es tautología o consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas.

La Lógica Proposicional es decidible

Preguntas .....