LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

APLICACIONES DE LA LÓGICA

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

UNSL

Demostración Matemática

- Según el diccionario de la Real Academia, *demostración* (del latín *demonstratio*) es: "*la prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes*".

- La *demostración matemática* tiene como objetivo mostrar rigurosamente un resultado matemático de manera clara, pero al mismo tiempo intuitiva y entendible.

- Partiendo de verdades ya conocidas o de resultados previamente obtenidos, debemos encontrar argumentos lógicos que nos conduzcan a la conclusión deseada.

- Veamos algunos conceptos previos:

  - *Hipótesis*: Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar, en forma lógica, una nueva proposición.

Demostración Matemática

- *Definición:* Es una explicación exacta y sin ambigüedad del significado de un término o frase matemática.

Definición: *Un número entero n es* **par** *si existe un entero k, tal que $n = 2k$.*

Por ejemplo, 4, −28, 0 son pares, pues

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 & (k = 2), \\ -28 &= 2 \cdot (-14) & (k = -14), \\ 0 &= 2 \cdot 0 & (k = 0). \end{aligned}$$

- Las definiciones usualmente se expresan como proposiciones *condicionales,* aunque lo más adecuado sería expresarlas como proposiciones *bicondicionales*:

"*Un número entero n es* **par** *si y solo si existe un entero k, tal que $n = 2k$,*"

Demostración Matemática

- *Teorema:* es una proposición verdadera, cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (*hipótesis*), se alcanza una verdad (*tesis*) que no es evidente por sí misma.
  - Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales del tipo:

Hipótesis $P \Rightarrow Q$ ***Tesis***

Se lee: *"si P, entonces Q"*

Ejemplo:

Proposición *Si x es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c$, entonces*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demostración Matemática

- *Teorema:* es una proposición verdadera, cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (*hipótesis*), se alcanza una verdad (*tesis*) que no es evidente por sí misma.
  - Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales del tipo:

Hipótesis $$P \Rightarrow Q$$ ***Tesis***

Se lee: *"si P, entonces Q"*

Ejemplo:

Proposición *Si x es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c$, entonces*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demostración Matemática

- *Teorema:* es una proposición verdadera, cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (*hipótesis*), se alcanza una verdad (*tesis*) que no es evidente por sí misma.
  - Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales del tipo:

$$P \Rightarrow Q$$

  - Algunos teoremas tienen la forma de un *bicondicional*, estos pueden verse como dos proposiciones condicionales:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

$$P \Rightarrow Q \qquad \text{y} \qquad Q \Rightarrow P$$

Demostración Matemática

- *Teorema:* es una proposición verdadera, cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (*hipótesis*), se alcanza una verdad (*tesis*) que no es evidente por sí misma.
  - Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales del tipo:

$$P \Rightarrow Q$$

  - Algunos teoremas tienen la forma de un *bicondicional*, estos pueden verse como dos proposiciones condicionales:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

  - Otros teoremas son simplemente proposiciones *P*:

Teorema *Existe una infinidad de números primos.*

Demostración Matemática

- *Teorema:* es una proposición verdadera, cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (*hipótesis*), se alcanza una verdad (*tesis*) que no es evidente por sí misma.

⌘ Hay varias palabras que tienen un significado parecido al de la palabra *teorema*:

- *Lema:* Es una proposición preliminar cuya demostración facilita la demostración de un teorema.

- *Corolario:* Es una proposición que se deduce por si sola (o es consecuencia inmediata) de un teorema demostrado anteriormente.

- *Proposición:* Es una proposición matemática verdadera, pero no tan significativa como un teorema.

Demostración Matemática

- Una *demostración* es una secuencia de pasos en la que cada paso se sigue de los anteriores, generalmente aplicando la lógica, encontrándose en el último paso justamente la afirmación que se quiere probar.

- La demostración de un teorema es una verificación escrita que muestra que el teorema es verdadero.

valida el paso de (1) a (2)

Afirmación 1 *<justificación>*
Afirmación 2 *<justificación>*
⋮
Afirmación *n*-1 *<justificación>*
$\boxed{\text{Afirmación } n}$

Axiomas
Hipótesis
Definiciones
Afirmaciones anteriores
Proposiciones ya demostradas

tesis o conclusión que se quiere demostrar

Demostración Matemática

⌘ Entonces, dadas dos proposiciones P y Q, que pueden ser verdaderas o falsas, el problema será demostrar que *P implica Q*

⌘ Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

- *MÉTODO DIRECTO*: Se trata de de demostrar que si se cumple la propiedad *P*, entonces se verifica *Q*.

$$P \Rightarrow Q$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- No tiene sentido considerar que *P* sea falsa, porque de serlo, no habría nada que demostrar, ya que la implicación sería verdadera independiente del valor de verdad de *Q*.

Demostración Matemática

- *MÉTODO DIRECTO*: Se trata de de demostrar que si se cumple la propiedad P, entonces se verifica Q.

$$P \Rightarrow Q$$

- A partir de la *hipótesis*, P, se construye un argumento lógico en el cual se pueden utilizar *axiomas*, *teoremas*, *definiciones*, etc. mediante la aplicación de las reglas de validez, para llegar a la proposición Q como *conclusión o tesis*.

$$(P \Rightarrow P_1) \wedge (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3) \wedge \ \ldots (P_n \Rightarrow Q)$$

O también:

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \ \ldots \Rightarrow Q$$

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO DIRECTO*: Se trata de de demostrar que si se cumple la propiedad P, entonces se verifica Q.

$$P \Rightarrow Q$$

Creatividad

Esquema del método directo

Teorema: *Si P, entonces Q*

Demostración: Suponemos P.

$$\vdots$$

En consecuencia Q. $\square$

Indica fin de la demostración

$\diamond$

c.q.d.

Demostración Matemática — *Método Directo*

Ejemplo:

Teorema: *El producto de dos números enteros impares es número impar.*

Demostración: Si n y m son enteros impares, por definición de número entero impar, para algún $a \in \mathbb{Z}$ y algún $b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\underline{n = 2a + 1}$ y $\underline{m = 2b + 1}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
n \times m &= (2a + 1)(2b + 1) && \text{Reemplazo } n \text{ y } m \\
&= 4ab + 2a + 2b + 1 && \text{multiplicación de polinomios} \\
&= 2\underbrace{(2ab + a + b)}_{c} + 1 && \text{factor común} \\
&= 2c + 1 && \text{reescribo}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Teorema: *El producto de dos números enteros impares es número impar.*

Demostración: Si n y m son enteros impares, por definición de número entero impar, para algún $a \in \mathbb{Z}$ y algún $b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $n = 2a + 1$ y $m = 2b + 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
n \times m &= (2a + 1)(2b + 1) \\
&= 4ab + 2a + 2b + 1 \\
&= 2(2ab + a + b) + 1 \\
&= 2c + 1
\end{aligned}
$$

por lo tanto $n \cdot m$ es impar $\square$

Demostración Matemática

⌘ Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO CONTRARRECÍPROCO*: Este mecanismo se basa en el hecho de que $P \Rightarrow Q$ es lógicamente equivalentemente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

⌘ Entonces si negando la tesis Q se obtiene la negación de la hipótesis P, se asegura que la proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera.

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO CONTRARRECÍPROCO*: Luego para demostrar $P \Rightarrow Q$ se realiza una demostración directa de:

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Esquema del método contrarrecíproco

Teorema: *Si P, entonces Q*

Demostración: (por contrarrecíproco) Suponemos $\neg Q$.

$\vdots$

En consecuencia $\neg P$. $\square$

Ejemplo:

Teorema: *Si* $\underbrace{3x - 1 \text{ es par}}_{P}$*, entonces* $\underbrace{x \text{ es impar}}_{Q}$*.*

Demostración: (por contrarrecíproco) Supongamos que x no es impar, entonces si x es par, existe un número entero a tal que:

$$x = 2a$$

$$\begin{aligned}
3x - 1 &= 3\,(2a) - 1 && \text{remplazo } x \text{ por su definición} \\
&= 6a - 1 - 1 + 1 && \text{opero, sumo y resto 1} \\
&= 6a - 2 + 1 && \text{opero} \\
&= 2\underbrace{(3a - 1)}_{a'} + 1 && \text{factor común}
\end{aligned}$$

Ejemplo:

Teorema: *Si* $3x - 1$ *es par, entonces x es impar.*

Demostración: (por contrarrecíproco) Supongamos que x no es impar, entonces si x es par, existe un número entero a tal que:

$$x = 2a$$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 3\ (2a) - 1 \\ &= 6a - 1 - 1 + 1 \\ &= 6a - 2 + 1 \\ &= 2(3a - 1) + 1 \\ &= 2\ a' + 1 \end{aligned}$$

reescribo

por lo tanto $3x - 1$ es impar

Ejemplo:

Teorema: *Si* $3x - 1$ *es par, entonces x es impar.*

Demostración: (por contrarrecíproco) Supongamos que x no es impar, entonces si x es par, existe un número entero a tal que:

$$x = 2a$$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 3\ (2a) - 1 \\ &= 6a - 1 - 1 + 1 \\ &= 6a - 2 + 1 \\ &= 2(3a - 1) + 1 \\ &= 2\ a' + 1 \end{aligned}$$

Entonces se demostró que:

Si $3x - 1$ *es par,* $\Rightarrow$ *x es impar* $\square$

Demostración Matemática

⌘ Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CONTRADICCIÓN:* este método es más conocido como método de *REDUCCIÓN AL ABSURDO.* Este mecanismo consiste en demostrar una afirmación P, partiendo de suponer que la negación de P implica o conduce a una *contradicción*. Es decir:

$$\neg P \Rightarrow \underbrace{(C \wedge \neg C)}_{\text{Contradicción}}$$

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CONTRADICCIÓN:* este método es más conocido como método de *REDUCCIÓN AL ABSURDO.* Este mecanismo consiste en demostrar una afirmación *P*, partiendo de suponer que la negación de *P* implica o conduce a una *contradicción*. Es decir:

$$\neg P \Rightarrow (C \land \neg C)$$

⌘ La tabla muestra que demostrar $\neg P \Rightarrow (C \land \neg C)$ equivale a demostrar P.

P	C	$\neg P$	$\neg C$	$C \land \neg C$	$(\neg P) \Rightarrow (C \land \neg C)$
V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	F	F	**F**
F	F	V	V	F	**F**

,

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CONTRADICCIÓN:* este método es más conocido como método de *REDUCCIÓN AL ABSURDO.* Este mecanismo consiste en demostrar una afirmación *P*, partiendo de suponer que la negación de *P* implica o conduce a una *contradicción*. Es decir:

$$\neg P \Rightarrow (C \wedge \neg C)$$

Esquema del método por contradicción:

Teorema: P

Demostración: (por contradicción) Suponemos $\neg P$.

$$\vdots$$

En consecuencia $(C \wedge \neg C)$. $\square$

Ejemplo:

Teorema: *El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.*

Demostración: (por contradicción) Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito.

- Si $\mathbb{N}$ es finito, entonces, existe un ***natural*** m tal que $m \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
- Si $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces:
  - $(m + 1) \in \mathbb{N}$ (por definición de número natural)
  - y $\underbrace{m \geq (m + 1)}_{\textit{Contradicción}}$ (por ser $\mathbb{N}$ finito)

Ejemplo:

Teorema: *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es infinito.*

Demostración: (por contradicción) Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito.

- Si $\mathbb{N}$ es finito, entonces, existe un ***natural*** m tal que $m \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
- Si $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces:
  - $(m + 1) \in \mathbb{N}$ (por definición de número natural)
  - y $m \geq (m + 1)$ (por ser $\mathbb{N}$ finito)

Entonces partiendo de $\neg P$ llego a una *contradicción* $(m \geq (m + 1))$ por lo tanto:

El conjunto $\mathbb{N}$ *es infinito.*

$\square$

- Cuando la proposición que se quiere demostrar tiene la forma $P \Rightarrow Q$, su negación es la proposición $\neg(P \Rightarrow Q)$ o su equivalente $P \wedge \neg Q$. Entonces demostrando :

$$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$$

Se demuestra que $P \Rightarrow Q$ es verdadera.

Esquema del método por contradicción:

Teorema: $P \Rightarrow Q$

Demostración: (por contradicción) Suponemos $P \wedge \neg Q$.

$$\vdots$$

En consecuencia $(C \wedge \neg C)$. $\square$

Demostración Matemática *Método por Contradicción*

Ejemplo:

Teorema: *Para* $n \in \mathbb{Z}$, *Si* n^2 *es un entero par entonces* n *es par.*

Demostración: (por contradicción) Suponemos que n^2 es par y n no es par.

- Si n no es par, entonces es impar, luego $n = 2a + 1$, para algún $a \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2a+1)^2 && \text{reemplazo } n \\
&= (2a+1)(2a+1) && \text{definición del cuadrado} \\
&= 4a^2 + 4a + 1 && \text{multiplicación de polinomios} \\
&= 2\underbrace{(2a^2 + 2a)}_{a'} + 1 && \text{factor común}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Teorema: *Para $n \in \mathbb{Z}$, Si n^2 es un entero par entonces n es par.*

Demostración: (por contradicción) Suponemos que n^2 es par y n no es par.

- Si n no es par, entonces es impar, luego $n = 2a + 1$, para algún $a \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2a+1)^2 \\
&= (2a+1)(2a+1) \\
&= 4a^2 + 4a + 1 \\
&= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\
&= 2a' + 1
\end{aligned}
$$

!!!

reescribo

por lo tanto n^2 es impar

Ejemplo:

Teorema: *Para* $n \in \mathbb{Z}$, *Si* n^2 *es un entero par entonces* **n** *es par.*

Demostración: (por contradicción) Suponemos que n^2 es par y n no es par.

- Si n no es par, entonces es impar, luego $n = 2a + 1$, para algún $a \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2a + 1)^2 \\
&= (2a + 1)(2a + 1) \\
&= 4a^2 + 4a + 1 \\
&= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\
&= 2a' + 1
\end{aligned}
$$

Luego si n^2 es par, n es par $\square$

Demostración Matemática

⌘ Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

⌘ *DEMOSTRACIÓN DE BICONDICIONALES*: Se trata de demostrar proposiciones del tipo:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

⌘ Una forma de hacerlo es utilizando el *método directo,* donde cada justificación es un bicondicional.

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \ \ldots \Leftrightarrow Q$$

Ejemplo:

Teorema: *En la teoría de conjuntos,* $A \cap B = B \cap A$

Demostración:

Definición de intersección

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \ \wedge \ x \in B) \iff (x \in B \ \wedge \ x \in A)$$

Conmutativa del $\wedge$

Demostración Matemática

⌘ *DEMOSTRACIÓN DE BICONDICIONALES*: Se trata de demostrar proposiciones del tipo:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

⌘ Una forma de hacerlo es utilizando el *método directo,* donde cada justificación es un bicondicional.

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \ \ldots \Leftrightarrow Q$$

Ejemplo:

Teorema: *En la teoría de conjuntos,* $A \cap B = B \cap A$

Demostración:

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \ \wedge \ x \in B) \iff (x \in B \ \wedge \ x \in A)$$

$$\iff \ x \in (B \cap A)$$

Definición de intersección

Demostración Matemática

⌘ *DEMOSTRACIÓN DE BICONDICIONALES*: Se trata de demostrar proposiciones del tipo:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

⌘ Una forma de hacerlo es utilizando el *método directo,* donde cada justificación es un bicondicional.

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \ \ldots \Leftrightarrow Q$$

Ejemplo:

Teorema: *En la teoría de conjuntos,* $A \cap B = B \cap A$

Demostración:

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \ \wedge \ x \in B) \iff (x \in B \ \wedge \ x \in A)$$

$$\iff x \in (B \cap A)$$

Por definición de igualdad de conjuntos $A \cap B = B \cap A$ $\square$

Demostración Matemática

- *DEMOSTRACIÓN DE BICONDICIONALES*: Se trata de demostrar proposiciones del tipo:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

- Una forma de hacerlo es utilizando el *método directo,* donde cada justificación es un bicondicional.

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \;\ldots \Leftrightarrow Q$$

- A veces esto no resulta y se descompone el *bicondicional* en dos proposiciones y se demuestran ambas proposiciones por separado:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

$$P \Rightarrow Q \qquad \text{y} \qquad Q \Rightarrow P$$

- La equivalencia $P \iff Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ permite que la demostración de ambas proposiciones alcance para afirmar que el bicondiconal es verdadero.

Esquema para demostrar un bicondicional:

Teorema: *P sí y solo si Q*

Demostración: Demostrar $P \Rightarrow Q$.

Demostrar $Q \Rightarrow P$. $\square$

Utilizar cualquier método conocido

Ejemplo:

Teorema: *Un entero n es impar si y solo si n^2 es impar.*

Demostración:

Método Directo

1) n *es impar* $\Rightarrow n^2$ *es impar*

- Si n es impar, por definición $n = 2a + 1$ (para algún $a \in \mathbb{Z}$)

Reemplazo n

definición del cuadrado

multiplicación de polinomios

factor común

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2a+1)^2 \\
&= (2a+1)(2a+1) \\
&= 4a^2 + 4a + 1 \\
&= 2(\underbrace{2a^2 + 2a}_{a'}) + 1 \\
&= 2a' + 1
\end{aligned}
$$

Luego si n es impar, n^2 es impar

Demostración:

2) n^2 *es impar* $\Rightarrow$ *n es impar*

Método Contrarecíproco

- Suponemos que n no es impar.
- Si n no es impar, es par y por definición $n = 2a$ (para algún $a \in \mathbb{Z}$)

$$n^2 = (2a)^2$$ reemplazo n

$$= 4a^2$$ aplico el cuadrado

$$= 2\,\underbrace{(2a^2)}_{a'}$$ factor común

Demostración:

Método Contrarecíproco

2) n^2 *es impar* $\Rightarrow$ *n es impar*

- Suponemos que n no es impar:

- Si n no es impar, es par y por definición $n = 2a$ (para algún $a \in \mathbb{Z}$)

$$n^2 = (2a)^2$$
$$= 4a^2$$
$$= 2\,(2a^2)$$
$$= 2\,a'$$

Luego n^2 es par

Con esto demostramos $(P \Rightarrow Q)$ y $(Q \Rightarrow P)$

Demostración:

Método Contrarecíproco

2) n^2 *es impar* $\Rightarrow$ *n es impar*

- Suponemos que n no es impar:
- Si n no es impar, es par y por definición $n = 2a$ (para algún $a \in \mathbb{Z}$)

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2a)^2 \\
&= 4a^2 \\
&= 2\,(2a^2) \\
&= 2\,a'
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que si n^2 es impar, entonces n es impar. $\square$

Demostración Matemática

⌘ Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CASOS*: al demostrar algunas proposiciones es necesario considerar un número *finito* de casos y realizar la demostración de cada uno por separado.

Ejemplo:

Teorema: *Se quiere demostrar que* $(P \vee Q) \Rightarrow R$

*Demostración***:** (por casos) Una forma de resolver la demostración es separarla en dos casos:

- Caso 1: $P \Rightarrow R$
- Caso 2: $Q \Rightarrow R$

⌘ Luego, si se demostró que cada caso es verdadero se puede afirmar que $(P \vee Q) \Rightarrow R$ también lo es.

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CASOS*: al demostrar algunas proposiciones es necesario considerar un número finito de casos y realizar la demostración de cada uno por separado.

Ejemplo:

Teorema: *Se quiere demostrar que* $(P \vee Q) \Rightarrow R$

Demostración: (por casos) Una forma de resolver la demostración es separarla en dos casos:

- Caso 1: $P \Rightarrow R$
- Caso 2: $Q \Rightarrow R$

⌘ Es fácil ver, usando la tabla de vedad, que lo que se quiere demostrar y la conjunción de los dos casos son equivalentes.

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv ((Q \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$$

Demostración Matemática

- *MÉTODO POR CASOS*: al demostrar algunas proposiciones es necesario considerar un número finito de casos y realizar la demostración de cada uno por separado .

- La demostración de un bicondicional también puede verse como una demostración por casos:

Ejemplo:

Teorema: *Se quiere demostrar que* $P \iff Q$

Demostración: (por casos) Resolver la demostración separando en dos casos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Caso 1: } P \Rightarrow Q \\ \bullet \text{ Caso 2: } Q \Rightarrow P \end{array}\right\} \quad \text{Luego } P \iff Q$$

Ejemplo:

Teorema: *si x es un número real, entonces* $x^2 \geq 0$.

Demostración: (por casos) Suponemos que x es un número real, luego tenemos tres casos, $x < 0 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x < 0$, entonces:

- Caso 1: $x < 0$ entonces

  $-x > 0$ y $(-x)(-x) > 0$ por lo tanto $x^2 > 0$

- Caso 2: $x = 0$ entonces

  $x \,.\, x = 0.0 = 0$ por lo tanto $x^2 = 0$

- Caso 3: $x > 0$ entonces

  $x \,.\, x > 0$ por lo tanto $x^2 > 0$

Luego tenemos que $x^2 \geq 0$ $\square$

Demostración Matemática

- Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

- ¿Qué pasa si quiero demostrar que una propiedad es falsa?
- Una posibilidad sería demostrar la negación de esa propiedad, es decir:

Quiero demostrar que P es falsa, entonces demuestro que $\neg P$ es verdadera.

- En otras ocasiones, podemos enfrentarnos a un problema en el que la propiedad que queremos demostrar no tiene un ataque sencillo.

- *MÉTODO POR CONTRAEJEMPLOS*: se utiliza generalmente para demostrar que una proposición es falsa. Consiste en establecer un *ejemplo* con el cual se prueba la falsedad de la proposición.

Demostración Matemática

⌘ *MÉTODO POR CONTRAEJEMPLOS*: se utiliza generalmente para demostrar que una proposición es falsa. Consiste en establecer un *ejemplo* con el cual se prueba la falsedad de la proposición.

⌘ A este tipo de ejemplos se los llama *contraejemplos*.

⌘ Esta demostración está justificada por lo siguiente: queremos demostrar que la propiedad P es falsa, es decir que *no es cierto* que $(\forall x \ P(x))$, es decir:

$$\neg(\forall x \ P(x))$$

⌘ Por las leyes de D'Morgan la negación de la proposición $(\forall x \ P(x))$, es la proposición:

$$(\exists x \ \neg P(x))$$

Contraejemplo

⌘ Si lo que se quiere demostrar es la falsedad de algo del tipo $P \Rightarrow Q$, para hacerlo con este método vemos que:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

⌘ Debemos hallar un ejemplo en el cual *P es verdadera y Q es falsa.* La existencia de tal ejemplo demuestra que *$P \Rightarrow Q$ es falsa.*

Contraejemplo

Ejemplos:

Proposición: *Si* $x \in \mathbb{R}$, *entonces,* x^2 *es mayor que 0.*

Demostración: (por contraejemplo) Se demuestra que la proposición es falsa con el siguiente contraejemplo:

El $0 \in \mathbb{R}$ *y* 0^2 *no es mayor que 0* $\square$

Proposición: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $n^2 + 5n$ *es múltiplo de 6.*

Demostración: (por contraejemplo) Se demuestra que la proposición $P(n)$ es falsa con el siguiente contraejemplo:

$2 \in \mathbb{N}$ *y* $2^2 + (5 \times 2) = 14$ *que no es múltiplo de 6.* $\square$

Demostración Matemática

- Existen diferentes técnicas para realizar una demostración, las que se verán aquí son:

1. Método Directo
2. Método Contrarrecíproco
3. Método por Contradicción
4. Demostración de Bicondicionales
5. Método por casos
6. Método por Contraejemplos
7. Inducción Matemática

Demostración Matemática

- *INDUCCIÓN MATEMÁTICA*: este método generalmente se usa para demostrar proposiciones que son ciertas para todos los números naturales; o para demostrar proposiciones planteadas en términos de números naturales.

- Son proposiciones del tipo:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; P(n) \quad \mathbf{o} \quad P(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

- Es decir, tenemos una colección $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ de proposiciones y queremos demostrar que *todas* son verdaderas.

Demostración Matemática

⌘ *INDUCCIÓN MATEMÁTICA*: este método generalmente se usa para demostrar proposiciones que son ciertas para todos los números naturales; o para demostrar proposiciones planteadas en términos de números naturales.

⌘ El proceso consiste en dos pasos:

- ❖ Paso 1: Comprobar que $P(1)$ es verdadera.
- ❖ Paso 2: Demostrar la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Según esto, si $P(1)$ es verdadero y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es verdadera, entonces $P(n)$ es verdadera para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

⌘ Al paso 1 se lo llama *paso base* de la demostración.

⌘ La hipótesis $P(k)$ se considera verdadera y recibe el nombre de *hipótesis de inducción*.

Demostración Matemática

⌘ *INDUCCIÓN MATEMÁTICA*: este método se usa para demostrar proposiciones que son ciertas para todos los números naturales; o para demostrar proposiciones planteadas en términos de números naturales.

Esquema de la inducción matemática

Teorema: *Las proposiciones* $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ *son todas verdaderas*

Demostración: (por inducción)

(1) Se demuestra que $P(1)$ es cierta.

(2) Se prueba que *si* $P(k)$ *es cierta, entonces* $P(k+1)$ *también lo es.*

En ese caso, la propiedad $P(n)$ es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

□

Ejemplo:

Teorema: *La suma de los n primeros enteros positivos es igual a n(n+1)/2.*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

⌘ Veamos que esto es cierto, por lo menos para algunos naturales:

$n = 3$

$$1 + 2 + 3 = 6 \qquad \frac{3\,(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$n = 4$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad \frac{4\,(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$n = 6$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \qquad \frac{6\,(6+1)}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Ejemplo:

Teorema: *La suma de los n primeros enteros positivos es igual a n(n+1)/2.*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

Demostración: (por inducción matemática) Llamaremos $P(n)$ a esta proposición y comenzaremos con el primer paso o *paso base*:

- Paso 1: Comprobar que $P(n)$ es verdadera, con $n=1$.

$$P(1) = 1$$

$$\frac{n\ (n+1)}{2} = \frac{1\ (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Luego, el paso base es verdadero.

- Paso 2: Demostrar la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Es decir, demostrar que si suponemos que la propiedad es cierta para k, también lo es para $k+1$.

Entonces, asumiendo como verdadera la *hipótesis de inducción*:

$$P(k) = \frac{k\ (k+1)}{2}$$

deberíamos demostrar que:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Comencemos:

Definición de $P(n)$

$$P(k+1) = \underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{P(k)} + (k+1)$$

❖ Paso 2: Demostrar la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Es decir, demostrar que si suponemos que la propiedad es cierta para k, también lo es para $k+1$.

Entonces, asumiendo como verdadera la *hipótesis de inducción*:

$$P(k) = \frac{k\ (k+1)}{2}$$

deberíamos demostrar que:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Reescribo

Comencemos:

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = P(k) + (k+1)$$

Demostración Matemática *Inducción Matemática*

- Paso 2: Demostrar la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = P(k) + (k+1)$$

Sabemos que $P(k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$ por ser la *hipótesis de inducción*

reemplazo $P(k)$

$$P(k+1) = P(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Sumo

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

factor común

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Luego $P(n)$ vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$

❖ Paso 2: Demostrar la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Es decir que *La suma de los **n** primeros enteros positivos es igual a* $n(n+1)/2$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\square$$

⌘ Otra forma de notar esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

⌘ En algunos casos la proposición puede estar planteada para un subconjunto de $\mathbb{N}$: $P(n), \forall n \in M,$ donde $M \subseteq \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$$M = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq a\} \;=\; \{a, a+1, a+2, a+3, \cdots\}$$

- En estos casos, el Paso 1, consiste en comprobar si $P(n)$ se cumple para $\underline{n=a}$.

Ejemplo:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x = 3h, \text{ donde } h \in \mathbb{N}\} \;=\; \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \cdots\}$$

- En este caso, el *Paso 1*, consiste en comprobar que la "*primera*" proposición, es verdadera (aquí $\underline{P(3)}$).
- Luego, para el *Paso* 2 hay que considerar que, la proposición siguiente a $P(k)$, donde $k \in M$, es $\underline{P(k+3)}$.

Demostración Matemática

- Hay otras formas de demostrar teoremas, quizá menos usadas:

  - *Demostración de proposiciones "y"*: se quiere demostrar la proposición $P \Rightarrow (Q \wedge R)$. Sabiendo

    $$P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$$

    debemos demostrar $P \Rightarrow Q$ y $P \Rightarrow R$.

  - *Demostración de proposiciones "o"*: se quiere demostrar la proposición $P \Rightarrow (Q \vee R)$.

    Procedemos por contradicción. Suponemos que P y $\neg(Q \vee R)$ son verdaderas y debemos llegar a una contradicción.

    Es útil recordar que: $\neg(Q \vee R) \equiv (\neg Q \wedge \neg R)$ (*leyes de Morgan*)

Demostración Matemática

- Conclusiones:
  - Demostración:

Afirmación (1) *<justificación>*
Afirmación (2) *<justificación>*
⋮
Afirmación (n-1) *<justificación>*
Afirmación (n)

Axiomas
Hipótesis
Definiciones
Afirmaciones anteriores
Proposiciones ya demostradas

  - Técnicas de demostración:
    - *Método Directo*
    - *Método Contrarrecíproco*
    - *Método por Contradicción*
    - *Demostración de bicondicionales*
    - *Método por casos*
    - *Método por Contraejemplos*
    - *Inducción Matemática*

Demostración Matemática

⌘ ***No hay una única manera de realizar una demostración***:

Ejemplo:

Teorema: *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*

Método Directo

Demostración: Si x es impar, por definición de número entero impar, $x = 2a + 1$ para algún a. Entonces:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (2a+1)^2 && \text{definición de nro. impar} \\
&= (2a+1)(2a+1) && \text{definición del cuadrado} \\
&= 4a^2 + 4a + 1 && \text{multiplicación de polinomios} \\
&= 2\underbrace{(2a^2 + 2a)}_{a'} + 1 && \text{factor común}
\end{aligned}
$$

Demostración Matemática

⌘ ***No hay una única manera de realizar una demostración***:

Ejemplo:

Teorema: *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*

Método Directo

Demostración: Si x es impar, por definición de número entero impar, $x = 2a + 1$ para algún a. Entonces:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (2a + 1)^2 \\
&= (2a + 1)(2a + 1) \\
&= 4a^2 + 4a + 1 \\
&= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\
&= 2a' + 1
\end{aligned}
$$

x^2 es impar, por lo tanto el teorema es verdadero

□

Demostración Matemática

⌘ ***No hay una única manera de realizar una demostración***:

Ejemplo:

Teorema: *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*

Método por Contradicción

Demostración: Al negar mi proposición supongo que x es impar y x^2 es par. Luego, por definición de número impar, $x = 2a + 1$:

$$\begin{aligned}
x^2 &= (2a+1)^2 && \text{Reemplazo } x \\
&= (2a+1)(2a+1) && \text{definición del cuadrado} \\
&= 4a^2 + 4a + 1 && \text{multiplicación de polinomios} \\
&= 2\underbrace{(2a^2 + 2a)}_{a'} + 1 && \text{factor común}
\end{aligned}$$

Demostración Matemática

⌘ ***No hay una única manera de realizar una demostración***:

Ejemplo:

Teorema: *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*

Método por Contradicción

Demostración: Al negar mi proposición supongo que x es impar y x^2 es par. Luego, por definición de número impar, $x = 2a + 1$:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (2a+1)^2 \\
&= (2a+1)(2a+1) \\
&= 4a^2 + 4a + 1 \\
&= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\
&= 2a' + 1
\end{aligned}
$$

!!!

por lo tanto x^2 es impar

Demostración Matemática

⌘ ***No hay una única manera de realizar una demostración***:

Ejemplo:

Teorema: *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*

Método por Contradicción

Demostración: Al negar mi proposición supongo que x es impar y x^2 es par. Luego, por definición de número impar, $x = 2a + 1$:

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a+1)(2a+1) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\ &= 2a' + 1 \end{aligned}$$

por lo tanto se demostró que el ***teorema es verdadero***

$\square$

Demostración Matemática

- Conclusiones:

Para demostrar proposiciones

- Se deben entender *todas las hipótesis,* así como el resultado al que se quiere llegar.
- Es muy importante conocer el marco en el que estamos trabajando.
- Utilizar cualquiera de los mecanismos vistos.
- Tener en cuenta los conocimientos previos de cada uno de los temas en los que nos desenvolvemos.
- A medida que vaya pasando el tiempo y con la práctica, será más fácil darse cuenta qué tipo de razonamiento se debe aplicar.

Preguntas

¡MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!!