Lógica Proposicional, Teoremas y Demostraciones

Manuel Maia

19 de marzo de 2012

1 Proposiciones

Una **proposición** es una oración declarativa o una expresión matemática que es verdadera o es falsa, pero *no* ambas. De esta manera, una proposición tiene un **valor de verdad**, que puede ser V, si es verdadera o puede ser F, si es falsa. Consideraremos exclusivamente proposiciones matemáticas. Algunos ejemplos de proposiciones verdaderas son:

- "4 *es un número entero par*".
- "$15 \leq 15$".
- "*La solución de* $2x - 3 = 1$ *es* 2".
- "18 *es múltiplo de* 3".

Algunos ejemplos de proposiciones falsas son:

- "144 *es un número entero impar*".
- "$2 = 17$".
- "*La solución de* $2x - 3 = 1$ *es* 0".
- "16 *es múltiplo de* 5".

Algunos ejemplos de expresiones que no son proposiciones son:

- "73".
- "$2x - 1 = 3$".
- "*¿Cuál es la solución de* $2x - 3 = 1$*?*".

- “*x es múltiplo de* 3”.

Generalmente, para referirnos a proposiciones específicas se usan letras mayúsculas. Por ejemplo,

$P:$ 25 *es un número entero par.*

$Q:\ 3+4=7.$

$R:\ 2x+3$ *es una ecuación.*

Las proposiciones pueden contener variables. Por ejemplo, sea x un número entero y consideremos

$P:\ 2x+1$ *es un entero impar.*

Esta es una proposición que es verdadera no importa que número entero sea la variable x. Entonces podemos denotarla por

$P(x):\ 2x+1$ *es un entero impar.*

Hay oraciones o expresiones matemáticas que contienen variables y no son proposiciones. Por ejemplo,

$Q(x):$ El número entero x *es múltiplo de* 3.

Sólo será una proposición cuando le otorguemos un valor a x (y así podremos determinar si es verdadera o falsa). Por ejemplo, $Q(13)$ es falsa y $Q(21)$ es verdadera. Una expresión como $Q(x)$, cuyo valor de verdad depende de una o más variables, es lo que se llama una **expresión abierta**.

2 Conectivos Lógicos

Podemos usar la palabra “y” para conectar dos proposiciones y crear una nueva proposición. Por ejemplo, podemos conectar las proposiciones

$P:$ *El número* 4 *es un entero par.*

$Q:$ *El número* 5 *es un entero impar.*

para formar la nueva proposición

$R:$ *El número* 4 *es un entero par* ***y*** *el número* 5 *es un entero impar.*

La proposición R afirma que P y Q son ambas verdaderas. Como P y Q, en efecto son verdaderas, la proposición R también lo es.

Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P **y** Q". Se usa el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra "y". De esta manera, $P \wedge Q$ significa "P **y** Q".

La proposición $P \wedge Q$ es verdadera si ambas proposiciones P y Q son verdaderas. En cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente **tabla de verdad**.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En cada fila aparece una de las cuatro posibles combinaciones de valores de verdad para P y Q. Por ejemplo, si P es falsa y Q es verdadera, entonces $P \wedge Q$ es falsa.

También podemos conectar dos proposiciones usando la palabra "o" para crear una nueva proposición. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, la afirmación "P **o** Q" significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene "o" en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. De esta manera, por ejemplo, la proposición

"El número entero 4 *es par* ***o*** *el número entero* 3 *es par"*

es verdadera.

Se usa el símbolo $\vee$ para indicar la palabra "o". Así, $P \vee Q$ significa "P **o** Q". La tabla de verdad para $P \vee Q$ es la siguiente.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Otra manera de obtener nuevas proposiciones a partir de otras es usando la palabra "no". Dada una proposición cualquiera P, podemos formar una nueva proposición "**no es verdadero que** P". Por ejemplo, si consideramos la proposición (verdadera)

"El número entero 3 *es impar"*,

podemos formar la nueva proposición

***"No es verdadero que** el número entero* 3 *es impar"*,

la cual evidentemente es falsa.

Se usa el símbolo $\neg$ para indicar la frase "no es verdadero que". Así, $\neg P$ significa "**no es verdadero que** P". La tabla de verdad para $\neg P$ es la siguiente.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Otras maneras de expresar la negación de

"El número entero 3 *es impar"*,

son:

- *"Es falso que el número entero* 3 *es impar"*,
- *"El número entero* 3 *no es impar"*.

3 Proposiciones Condicionales

Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de condicionales. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos formar la nueva proposición "**Si** P, **entonces** Q." Esta proposición se escribe de manera simbólica como $P \Rightarrow Q$, la cual también se lee "P *implica* Q". Que la proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera significa que *si* P es verdadera *entonces* Q también debe ser verdadera (P verdadera obliga a que Q sea verdadera). Una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$ se conoce como **proposición condicional** (Q será verdadera *bajo la condición* de que P sea verdadera). El significado de $P \Rightarrow Q$ nos dice que la única manera en que la proposición $P \Rightarrow Q$ es falsa es cuando P es verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad para $P \Rightarrow Q$ es la siguiente.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las expresiones más comunes que significan $P \Rightarrow Q$ son las siguientes:

- Si P, entonces Q.
- Q, si P.
- Q, siempre que P.
- P es una condición suficiente para Q.
- Q es una condición necesaria para P.
- P, solo si Q.

Por ejemplo, la proposición (verdadera) "*Si el número entero a es par, entonces es el número entero a es múltiplo de* 2", se puede escribir como cualquiera de las siguientes expresiones:

- "*El número entero a es múltiplo de* 2*, si el número entero a es par*".
- "*El número entero a es múltiplo de* 2*, siempre que el número entero a sea par*".
- "*El número entero a es par, solo si el número entero a es múltiplo de* 2".

La **recíproca** de una proposición condicional $P \Rightarrow Q$ es la proposición $Q \Rightarrow P$. La **contrarrecíproca** (o **contrapositiva**) de $P \Rightarrow Q$ es la proposición $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

4 Proposiciones Bicondicionales

Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos considerar tanto $P \Rightarrow Q$ como su recíproca $Q \Rightarrow P$. En primer lugar, $P \Rightarrow Q$ no es lo mismo que $Q \Rightarrow P$, pues tienen distinto significado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.

Consideremos ahora la proposición más compleja (note el uso de los paréntesis)

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Ésta afirma que tanto $P \Rightarrow Q$ como $Q \Rightarrow P$ son verdaderas. Se usa el símbolo $\Leftrightarrow$ para expresar este significado. Ahora, $Q \Rightarrow P$ se lee "P si Q" y $P \Rightarrow Q$ se lee "P, solo si Q". En consecuencia, leemos $P \Leftrightarrow Q$ como "P, **si y solo si**, Q". Una proposición de la forma $P \Leftrightarrow Q$ se conoce como **proposición bicondicional**.

Por ejemplo, sea a un número entero fijo y consideremos:

P : *a es par,*

$Q:$ *a es múltiplo de* $2.$

Entonces:

$P \Rightarrow Q:$ *Si a es par, entonces a es múltiplo de* $2,$

$Q \Rightarrow P:$ *Si a es múltiplo de* $2,$ *entonces a es par.*

Así, tenemos la proposición (que es verdadera)

$P \Leftrightarrow Q:$ *a es par,* ***si y solo si****, a es múltiplo de* $2.$

El conocimiento que tenemos de las tablas para $\Rightarrow$ y $\wedge$, y un análisis cuidadoso de la siguiente tabla (nótese que las columnas intermedias corresponden a las proposiciones más simples que conforman $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$),

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

revela que la tabla de verdad para $P \Leftrightarrow Q$ es la siguiente.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

5 Equivalencia Lógica

Dos **proposiciones lógicamente equivalentes** son dos proposiciones cuyos valores de verdad coinciden línea por línea en una tabla de verdad, y de esta manera tienen el mismo significado. Por ejemplo, las proposiciones $P \Leftrightarrow Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ son lógicamente equivalentes, como podemos ver en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \wedge Q)$	$(\neg P \wedge \neg Q)$	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	V	F	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	F	F	F	**F**	**F**
F	F	V	V	F	V	**V**	**V**

Esto se evidencia en la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. La equivalencia lógica de $P \Leftrightarrow Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ la expresamos de la siguiente manera

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Un ejemplo importante (como veremos más adelante) de equivalencia lógica es el siguiente.

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P).$$

Que son lógicamente equivalentes, podemos verlo en la tabla siguiente.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Otras dos equivalencias lógicas importantes son las conocidas como **Leyes de Morgan**:

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

Verifique estas dos equivalencias como un ejercicio.

6 Definiciones, Teoremas, Proposiciones y Demostraciones

Una **definición** es una explicación exacta y sin ambigüedad del significado de un término o frase matemática. Daremos, como ejemplo, algunas definiciones que nos serán de utilidad en esta sección. No podemos definir todo, de manera que asumimos que el lector está de alguna manera familiarizado con los números naturales,

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots,$$

los números enteros,

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots,$$

los números racionales, los números reales, las operaciones de suma y producto con ellos, y algo de álgebra elemental.

Definición: *Un número entero n es **par** si existe un entero k, tal que $n = 2k$.*
Por ejemplo, 4, -28, 0 son pares, pues

$$\begin{array}{rcll} 4 & = & 2 \cdot 2 & (k = 2), \\ -28 & = & 2 \cdot (-14) & (k = -14), \\ 0 & = & 2 \cdot 0 & (k = 0). \end{array}$$

Definición: *Un número entero n es **impar** si existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$.*
Por ejemplo, 3, -15, 1 son impares, pues

$$\begin{array}{rcll} 3 & = & 2 \cdot 1 + 1 & (k = 1), \\ -15 & = & 2 \cdot (-8) + 1 & (k = -8), \\ 1 & = & 2 \cdot 0 + 1 & (k = 0). \end{array}$$

Claramente, un número entero cualquiera es par o es impar, pero no ambos a la vez.

Hay que hacer una observación. Las definiciones usualmente se expresan como proposiciones condicionales, aunque lo más adecuado sería expresarlas como proposiciones bicondicionales. Por ejemplo, la definición técnica y precisa de número entero par debería ser

"*Un número entero n es **par** si y solo si existe un entero k, tal que $n = 2k$,*"

pero se conviene en escribirla en forma de proposición condicional. Es decir, aún cuando una definición esté escrita en forma condicional, se interpreta como bicondicional. Esto es una convención.

Definición: *Dados dos enteros a y b, si $b = ac$, para algún entero c, decimos que a **divide** a b*, y escribimos $a \mid b$. En esta situación, a es un **divisor** de b, y b es **múltiplo** de a.

Por ejemplo, 4 divide a 28 pues $28 = 4 \cdot 7$. Escribimos esto como $4 \mid 28$. Sin embargo, 5 no divide a 12, pues no existe un entero c tal que $12 = 5c$. Escribimos esto como $5 \nmid 12$, que puede leerse como "5 *no divide a* 12".

Definición: *Decimos que un número natural p es **primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p.*

Los primeros diez números primos son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ y 29.

Un **teorema** es una proposición matemática que es verdadera, y puede ser (y ha sido) verificada como verdadera. Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales del tipo $P \Rightarrow Q$ (esto es, "si P, entonces Q"), aunque el enunciado del teorema o proposición a veces oculta este hecho. Nótese el enunciado de la siguiente proposición.

Proposición *Las soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c$ *son*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Con este enunciado, la proposición no parece ser una proposición condicional, sin embargo podemos expresar esta proposición como una proposición condicional escribiendo:

Proposición *Si* x *es una solución de la ecuación* $ax^2 + bx + c$, *entonces*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando un teorema se expresa como una proposición condicional $P \Rightarrow Q$, la proposición P se llama **hipótesis** y la proposición Q se llama **tesis**. Por ejemplo, en la proposición anterior la hipótesis es "x *es una solución de la ecuación* $ax^2 + bx + c$" y la tesis es

$$\text{“}x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{”}.$$

Cabe señalar que no todo teorema es una proposición condicional. Algunos tienen la forma bicondicional $P \Leftrightarrow Q$ (que puede expresarse como dos proposiciones condicionales). Otros teoremas son simplemente proposiciones P. Por ejemplo,

Teorema *Existe una infinidad de números primos.*

Hay teoremas que tienen otras formas menos comunes, por ejemplo, las tres siguientes: $(P \vee Q) \Rightarrow R$, $P \Rightarrow (Q \vee R)$, $P \Rightarrow (Q \wedge R)$. Hay varias palabras que significan esencialmente lo mismo que la palabra "teorema". En general "teorema" se reserva para proposiciones significativas o importantes (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras). Una proposición matemática verdadera, pero no significativa, se llama simplemente **proposición**, un **lema** es una proposición que ayuda a demostrar un teorema. Un **corolario** es una proposición relativamente sencilla que es consecuencia inmediata de un teorema o proposición más relevante.

Una **demostración** de un teorema es una verificación escrita que muestra que el teorema es verdadero. Informalmente, desde el punto de vista de la lógica, una demostración de un teorema es un argumento lógico que establece la verdad del teorema. Consiste de una sucesión de afirmaciones $(1), (2), \ldots, (n)$, tales que cada afirmación tiene una o más razones que justifican su validez, que pueden ser hipótesis, definiciones, afirmaciones anteriores en la misma demostración o proposiciones matemáticas ya demostradas y además la última afirmación, (n), es la tesis que queremos demostrar.

6.1 Demostración Directa

La forma más natural de demostración de un teorema o proposición que es una proposición condicional es la **demostración directa**. Analizando la tabla de verdad para $P \Rightarrow Q$, vemos que si queremos demostrar el teorema o proposición $P \Rightarrow Q$, es suficiente demostrar que Q es verdadera siempre que P lo sea (pues $P \Rightarrow Q$ es verdadera cuando P es falsa).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Así, en una demostración directa de $P \Rightarrow Q$ asumimos que la hipótesis, P, es verdadera y demostramos usando argumentos lógicos que la tesis, Q, es verdadera. Una demostración directa sigue el siguiente esquema.

Esquema para una demostración directa

Proposición *Si P, entonces Q.*

Demostración: Supongamos P.

$$\vdots$$

En consecuencia Q. $\square$

Los puntos suspensivos $\vdots$ indican la sucesión de razonamientos lógicos que inician con P verdadero y finalizan con Q verdadero. El inicio de la demostración se indica con *Demostración:* y se finaliza con el símbolo $\square$ o algún otro parecido.

Como ejemplo, demostraremos que la expresión abierta

"Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar"

es en realidad una proposición verdadera, esto es, no importa qué entero sea x, siempre será una proposición verdadera.

Proposición *Si x es un número entero impar, entonces x^2 es un número entero impar.*
Demostración: Supongamos que x es impar. Entonces, por definición de número entero impar, existe un número entero a, tal que

$$x = 2a + 1.$$

Ahora

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a+1)\cdot(2a+1) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\ &= 2k + 1 \quad (k = 2a^2 + 2a). \end{aligned}$$

En consecuencia, x^2 es impar. $\square$

6.2 Demostración por Contrarrecíproca

La **demostración por contrarrecíproca** se usa para demostrar, al igual que la demostración directa, teoremas y proposiciones que tienen la forma condicional $P \Rightarrow Q$. Esta forma de demostración se basa en el hecho de que $P \Rightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, como muestra la siguiente tabla.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

De esta manera, si queremos demostrar $P \Rightarrow Q$ por contrarrecíproca, basta demostrar $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ usando una demostración directa. Esto es, asumimos que $\neg Q$ es verdadera y demostramos que $\neg P$ es verdadera. Una demostración por contrarrecíproca sigue el siguiente esquema.

Esquema para una demostración por contrarrecíproca

Proposición *Si P, entonces Q.*
Demostración: (por contrarrecíproca) Supongamos $\neg Q$.

$$\vdots$$

En consecuencia $\neg P$. $\square$

Como ejemplo, demostraremos una misma proposición usando los dos métodos vistos hasta ahora.

Proposición *Si $3x-1$ es par, entonces x es impar.*
Demostración: (directa) Supongamos que $3x-1$ es par. Entonces, por definición, existe un número entero a, tal que

$$3x - 1 = 2a.$$

Así, restando $2x$ a ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x - 1 - 2x &= 2a - 2x \\ x - 1 &= 2(a - x) \\ x &= 2(a - x) + 1 \\ x &= 2k + 1 \quad (k = a - x). \end{aligned}$$

En consecuencia, x es impar. $\square$

Proposición *Si $3x-1$ es par, entonces x es impar.*
Demostración: (por contrarrecíproca) Supongamos que x no es impar. Entonces x es par. Así, existe un número entero a, tal que

$$x = 2a.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 3(2a) - 1 \\ &= 6a - 1 - 1 + 1 \\ &= 6a - 2 + 1 \\ &= 2(3a - 1) + 1 \\ &= 2k + 1 \quad (k = 3a - 1). \end{aligned}$$

En consecuencia, $3x - 1$ es impar. $\square$

Vale la pena mencionar que en ocasiones una demostración por contrarrecíproco es mucho más fácil que una demostración directa. Por ejemplo, consideremos la expresión abierta (que en realidad es una proposición)

"Si x^2 es par, entonces x es par".

Una demostración directa no es fácil, sin embargo, una demostración por contrarrecíproca sí lo es:

Proposición *Si x^2 es par, entonces x es par.*
Demostración: (por contrarrecíproca) Supongamos que x no es par. Entonces x es impar. Así, existe un número entero a, tal que

$$x = 2a + 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a+1)\cdot(2a+1) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\ &= 2k + 1 \quad (k = 2a^2 + 2a). \end{aligned}$$

Es decir, x^2 es impar. En consecuencia x es par. $\square$

Habrá notado, de hecho, que es la misma demostración directa de "*si x es impar, entonces x^2 es impar*". Esto es porque *"Si x^2 es par, entonces x es par"* es lógicamente equivalente a *"si x es impar, entonces x^2 es impar"*.

6.3 Demostración por Contradicción

Supongamos que queremos demostrar que una proposición P es verdadera. Una **demostración por contradicción** comienza suponiendo que P es falsa, esto es, que $\neg P$ es verdadera y finaliza deduciendo que para una cierta proposición C, se tiene que $C \wedge \neg C$ es verdadera. Esto es una contradicción, pues una proposición y su negación no pueden tener el mismo valor de verdad (recordemos la tabla de verdad para $\neg$). Esto es equivalente a demostrar que P es verdadera, como muestra la siguiente tabla de verdad,

P	C	$\neg P$	$\neg C$	$C \wedge \neg C$	$(\neg P) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$
V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	F	F	**F**
F	F	V	V	F	**F**

,

donde se ve que $P \equiv (\neg P) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$. Así, para demostrar P por contradicción, basta demostrar $(\neg P) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$ mediante una demostración directa. Así, una demostración por contradicción sigue el siguiente esquema.

Esquema para una demostración por contradicción de una proposición

> **Proposición** P.
>
> *Demostración:* (Por contradicción) Supongamos $\neg P$.
>
> $\vdots$
>
> En consecuencia $C \wedge \neg C$. □

Algo que no es claro en este método es qué proposición es la proposición C. En cualquier caso, se inicia la demostración asumiendo que $\neg P$ es verdadera y deduciendo lógicamente nuevas proposiciones se llegará a alguna proposición C **y** su negación, $\neg C$.

Daremos un ejemplo, pero antes necesitamos recordar qué es un número racional.

Un **número racional** es un número real de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$. Un **número irracional** es un número real que no es racional.

Proposición *El número $\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración: (por contradicción) Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional. Entonces $\sqrt{2}$ es racional y por tanto existen enteros a y b ($b \neq 0$), tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Supongamos que la fracción $\frac{a}{b}$ está completamente simplificada. Esto es, a y b no tienen factores comunes. En particular, esto significa que a y b no son ambos pares.

Ahora, elevando ambos lados de la ecuación (1) al cuadrado, obtenemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \tag{2}$$

y en consecuencia

$$a^2 = 2b^2. \tag{3}$$

Esto nos dice que a^2 es par. Pero hemos demostrado anteriormente que si a^2 es par, entonces a es par. Como sabemos que a y b no son ambos pares, se concluye que b **es impar**. Ahora, como a es par, existe un entero c tal que $a = 2c$. Sustituyendo en la ecuación (3), obtenemos $(2c)^2 = 2b^2$, y así $4c^2 = 2b^2$. Por lo tanto $b^2 = 2c^2$. En consecuencia b^2 es par, y por lo tanto, b **es par**. De esta manera, b es impar **y** b es par (una contradicción). $\square$

Supongamos que queremos demostrar una proposición condicional $P \Rightarrow Q$ usando una demostración por contradicción. Comenzamos suponiendo que $P \Rightarrow Q$ es falsa. Esto ocurre precisamente cuando Q es falsa y P verdadera (vea la tabla de verdad para $P \Rightarrow Q$). De esta manera, comenzamos suponiendo que Q es falsa y P es verdadera, y finalizamos deduciendo que para cierta proposición C se tiene que $C \wedge \neg C$ es verdadera, esto es, llegando a una contradicción. En consecuencia, por lo visto antes, $P \Rightarrow Q$ es verdadera.

Esquema para una demostración por contradicción de una proposición condicional

> **Proposición** $P \Rightarrow Q$.
> *Demostración:* (Por contradicción) Supongamos P y $\neg Q$.
>
> $\vdots$
>
> En consecuencia $C \wedge \neg C$. $\square$

Como ejemplo, demostraremos una proposición condicional ya demostrada, pero esta vez por contradicción.

Proposición *Si x^2 es par, entonces x es par.*
Demostración: (por contradicción) Supongamos que x^2 **es par** y que x no es par. Esto es, x es impar, y por lo tanto existe un entero a, tal que

$$x = 2a + 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a+1)\cdot(2a+1) \\ &= 4a^2+4a+1 \\ &= 2(2a^2+2a)+1 \\ &= 2k+1 \quad (k=2a^2+2a). \end{aligned}$$

En consecuencia, x^2 **es impar**. Hemos llegado a una contradicción, x^2 es par **y** x^2 es impar. □

6.4 Demostración de Bicondicionales

Sabemos que una proposición bicondicional

$$P \text{ si y solo si } Q$$

es lógicamente equivalente a la proposición

$$(\text{si } P, \text{ entonces } Q) \text{ y } (\text{si } Q, \text{ entonces } P).$$

De esta manera, para demostrar una proposición de la forma "*P si y solo si Q*" debemos demostrar dos proposiciones condicionales: la proposición "*si P, entonces Q*" y la proposición "*si Q, entonces P*". Una demostración de una proposición bicondicional tiene el siguiente esquema.

Esquema para una demostración
de una proposición bicondicional

> **Proposición** *P si y solo si Q.*
> *Demostración:*
> (Demuestre $P \Rightarrow Q$ usando una demostración directa,
> por contrarrecíproco o por contradicción).
> (Demuestre $Q \Rightarrow P$ usando una demostración directa,
> por contrarrecíproco o por contradicción). □

Veamos un ejemplo.

Proposición *El entero x es impar si y solo si x^2 es impar.*
Demostración: Primero demostraremos que si x es impar, entonces x^2 es impar. Supongamos que x es impar. Entonces, por definición, existe un entero a, tal que

$$x = 2a + 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a+1) \cdot (2a+1) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, x^2 es impar.

Recíprocamente, supongamos que x^2 es impar y veamos que x es impar. Para demostrar esto usaremos una demostración por contrarrecíproco. Supongamos que x no es impar. Entonces x es par, y por lo tanto existe un entero a tal que

$$x = 2a.$$

Así,

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a)^2 \\ &= 4a^2 \\ &= 2(2a^2). \end{aligned}$$

En consecuencia, x^2 es par. Esto demuestra que si x^2 es impar, entonces x es impar $\square$

6.5 Otras Demostraciones

Hay otros tipos de demostraciones menos comunes. Algunas son las siguientes (sólo las describiremos).

Demostración por Casos. Supongamos que queremos demostrar $P \vee Q \Rightarrow R$. Como

$$(P \vee Q \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R), \qquad \text{(verifíquelo)}$$

debemos considerar y demostrar dos casos, $P \Rightarrow R$ y $Q \Rightarrow R$.

Demostración de Proposiciones "y". Supongamos que queremos demostrar la proposición $P \Rightarrow (Q \wedge R)$. Como

$$(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R), \qquad \text{(verifíquelo)}$$

debemos demostrar $P \Rightarrow Q$ y $P \Rightarrow R$.

Demostración de Proposiciones "o". Para demostrar la proposición $P \Rightarrow (Q \vee R)$ procedemos por contradicción. Esto es, suponemos P y $\neg(Q \vee R)$ y debemos llegar a una contradicción. Es útil recordar que $\neg(Q \vee R) \equiv \neg Q \wedge \neg R$ (leyes de Morgan).

6.6 Conjeturas y Contraejemplos

Hay tres grandes categorías de proposiciones matemáticas:

1. **Teoremas y Proposiciones.** Estas son proposiciones verdaderas. Por ejemplo,
   - El Teorema de Pitágoras.
   - El cuadrado de un número impar es impar.
2. **Conjeturas.** Estas son proposiciones cuya verdad o falsedad aún no ha sido demostrada, pero hay indicios de que son verdaderas. Por ejemplo,
   - Cualquier número entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos (Conjetura de Goldbach).
   - Hay una infinidad de números primos de la forma $2^n - 1$, donde n es un entero positivo.
3. **Proposiciones Falsas.** Por ejemplo,
   - Todos los números primos son impares.
   - La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene tres soluciones.

La última categoría nos lleva a la pregunta ¿cómo demostrar que una proposición es falsa? Discutiremos brevemente algunos casos.

Supongamos que queremos demostrar que una proposición P es falsa. La manera de hacerlo es demostrando que $\neg P$ es verdadera, y esto lo podemos hacer, en teoría, mediante una demostración directa, por contrarrecíproco o por contradicción.

Ahora supongamos que queremos demostrar que una proposición condicional $P \Rightarrow Q$ es falsa. Como $P \Rightarrow Q$ es falsa únicamente cuando P es verdadera y Q falsa (vea la tabla de verdad para $P \Rightarrow Q$), debemos hallar un ejemplo en el cual P es verdadera y Q falsa. La existencia de tal ejemplo demuestra que $P \Rightarrow Q$ es falsa. Un ejemplo de este tipo es lo que se llama un **contraejemplo**.

Por ejemplo, consideremos la siguiente conjetura (pues no sabemos si es verdadera o es falsa).

Conjetura *Si n es un entero, entonces $n^2 - n + 11$ es un número primo.*

Hallemos el valor de $n^2 - n + 11$ para algunos valores de n :

n	$n^2 - n + 1$
-3	23
-2	17
-1	13
0	11
1	11
2	13
3	17
4	23
5	31
6	41
7	53
8	67
9	83
10	101

La conjetura parece ser verdadera, pues todos los números obtenidos en cada caso son primos. Esto no basta para concluir que la conjetura es verdadera. Habría que hacer una demostración. Antes de intentar una demostración, probemos un valor más para n. Observe que $11^2 - 11 + 11 = 11^2$ **no es primo**. En consecuencia, la conjetura es falsa, pues $n = 11$ es un contraejemplo. Así, podemos escribir la siguiente demostración de que es falsa:

Demostración (de que la conjetura es falsa): La proposición *Si n es un entero, entonces $n^2 - n + 11$ es un número primo* es **falsa**. Para un contraejemplo, tomemos $n = 11$, y el entero $11^2 - 11 + 11 = 121 = 11 \cdot 11$ no es primo. $\square$

7 Inducción Matemática

Considere la siguiente proposición.

Conjetura *La suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2.*

Esta conjetura dice lo siguiente:

n	suma de los n primeros números naturales impares es igual a	n^2
1	$1 =$	1
2	$1+3=$	4
3	$1+3+5=$	9
4	$1+3+5+7=$	16
5	$1+3+5+7+9=$	25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$	n^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observe que en las 5 primeras líneas de la tabla, la suma de n primeros números naturales impares es efectivamente igual a n^2. Observe también que el $n-$ésimo número natural impar (el último en cada suma) es $2n-1$.

Esta tabla lleva a la siguiente pregunta, ¿es verdad que para cada n, se tiene que

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2?$$

Es decir, ¿la conjetura es verdadera?

Podemos plantear esto en términos de proposiciones como sigue. Para cada número natural n tenemos una proposición $P(n)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
P(1):&\quad 1=1^2,\\
P(2):&\quad 1+3=2^2,\\
P(3):&\quad 1+3+5=3^2,\\
P(4):&\quad 1+3+5+7=4^2,\\
&\vdots\\
P(n):&\quad 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

¿Son verdaderas todas estas proposiciones?, ¿cómo demostrar, por ejemplo, que

$P(723452137234875623895647802020218237584298376342375629484474764157234968721450)$

es verdadera?

La técnica de demostración por **Inducción Matemática** (o simplemente **Inducción**) se usa cuando tenemos una colección,

$$P(1),\ P(2),\ P(3), \ldots, P(n), \ldots$$

de proposiciones y queremos demostrar que todas son verdaderas.

La validez de este método se demostrará después. Por lo pronto sólo presentaremos el esquema para una demostración por inducción y, usándolo demostraremos que la conjetura es verdadera.

Esquema para una demostración por Inducción Matemática

Proposición *Las proposiciones*

$$P(1),\ P(2),\ P(3), \ldots, P(n), \ldots$$

son todas verdaderas.

Demostración: (por Inducción)

(1) Se demuestra que $P(1)$ es verdadera.

(2) Dado $k \geq 1$, se demuestra que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es verdadera.

Se sigue por inducción matemática que cada $P(n)$ es verdadera. □

El primer paso, (1), se llama **paso inicial**. Generalmente, $P(1)$ es muy fácil de demostrar. El paso (2) se llama **paso inductivo**. Aquí, generalmente se hace una demostración directa de $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. La hipótesis de que $P(k)$ es verdadera se llama **hipótesis inductiva**.

Veamos que la conjetura

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2, \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

es verdadera.

Proposición *Si n es un número natural, entonces*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Demostración: (por Inducción) Aquí,

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

(1) Si $n = 1$, la proposición es

$$2 \cdot 1 - 1 = 1^2,$$

que obviamente es verdadera.

(2) Debemos demostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, donde

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

y

$$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2.$$

Usaremos una demostración directa. Supongamos que

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2(k+1) - 1) &= \\ 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) &= \\ [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)] + (2(k+1) - 1) &= \\ k^2 + (2(k+1) - 1) &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Así,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2.$$

Esto demuestra que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Se sigue por Inducción Matemática que si n es un número natural, entonces

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

□

8 Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios a, b, c y n son números enteros. Demuestre:

   (a) Si n es impar, entonces n^3 es impar.

   (b) Si a es impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es impar.

(c) Si a, b son pares, entonces ab es par.

(d) Si a, b son impares, entonces ab es impar.

(e) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$.

(f) Si $a \mid b$, entonces $a \mid (3b^3 - b^2 + 5b)$.

(g) Si n es un número entero, entonces $n^2 + 3n + 4$ es par.

(h) Si n^2 es impar, entonces n es impar.

(i) Si n es impar, entonces n^2 es impar.

(j) Si a no divide a bc, entonces a no divide a b.

(k) Si 4 no divide a a^2, entonces a es impar.

(l) Si n es impar, entonces $8 \mid (n^2 - 1)$.

(m) Si n es un número entero, entonces $4 \nmid (n^2 + 2)$.

(n) Si n es un entero, entonces $4 \mid n^2$ ó $4 \mid (n^2 - 1)$.

(o) Si $a \mid b$ y $a \mid (b^2 - c)$, entonces $a \mid c$.

2. En los siguientes ejercicios demuestre que la proposición es falsa:

(a) Si n es un número natural, entonces $2n^2 - 4n + 31$ es primo.

(b) Si n es un número natural, entonces $n^2 + 17n + 17$ es primo.

(c) Si $n^2 - n$ es par, entonces n es par.

(d) Si a es un número entero, entonces $4 \mid (a^2 - 3)$.

3. Demuestre por Inducción Matemática:

(a) Si n es un número natural, entonces

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

(b) Si n es un número natural, entonces

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Si n es un número natural, entonces

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$