LÓGICA MATEMÁTICA

APUNTES

Ingeniería en Informática

ESCET

Alessandra Gallinari

2006–2007

Capítulo 5

Teoría de la demostración

En el capítulo anterior estudiamos el método indirecto de refutación (y los tableaux semánticos) y el método directo de la tablas de verdad como métodos semánticos para verificar la validez de fórmulas y deducciones. Sin embargo, si el número de proposiciones atómicas es elevado las tablas de verdad no son un método eficiente (para un signatura con n fórmulas atómicas, tenemos que construir una tablas de 2^n filas).

La **teoría de la demostración o teoría de pruebas** nos proporciona métodos alternativos a las tablas de verdad para averiguar

- **la validez de una fórmula proposicional**: si φ es una fórmula válida se dice que es **demostrable** y se escribe $\vdash \varphi$.

- **si una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de premisas Φ**: si φ es consecuencia lógica de Φ se dice que φ es **deducible** en el sistema a partir de Φ y se escribe $\Phi \vdash \varphi$.

El objetivo principal de cualquier teoría de pruebas es demostrar la validez de fórmulas, independientemente del contexto particular que se estén considerando: la demostración de la validez de una fórmula o de una deducción en un sistema de demostración no se desarrolla teniendo en cuenta todas las posibles valoraciones, se obtiene utilizando una secuencia finita de pasos y, en cada uno de ellos, se aplican las reglas de inferencia del sistema.

Ya comentamos que los sistemas de demostración se suelen dividir en dos clases: **sistemas directos** y **sistemas indirectos** (o por **refutación**). Los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar. Los segundos aplican la técnica de reducción al absurdo.

Siendo sistemas clásicos, los sistemas de demostración directos tienen interés histórico y además son los más naturales ya que son los más cercanos a la forma de razonamiento habitual.

Los sistemas directos son adaptables a lógicas no clásicas, pero son de difícil automatización.

Lo sistemas de demostración indirectos son más modernos y adecuados para su automatización, pero no son aplicables a lógicas distintas de las lógicas clásicas.

En este capítulo estudiaremos un particular sistema de demostración axiomático, el sistema de deducción natural de Gentzen.

El método de los tableaux semánticos que estudiamos en la teoría interpretativa tiene, en realidad, una estructura completamente sintáctica y, por tanto, se puede considerar un ejemplo de sistemas de demostración axiomático indirecto.

Como veremos, es posible demostrar que estos sistemas axiomáticos son equivalentes a la teoría interpretativa. Es decir, se puede verificar que una fórmula proposicional es una tautología en la teoría interpretativa si y sólo si es una fórmula válida en la teoría de la demostración que vamos a estudiar.

5.1 Definición de sistema formal axiomático

Definición 5.1.1 *Un* **sistema de demostración formal S** *o* **sistema de pruebas** *se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:*

- A *es el* **alfabeto** *del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,*
- F *es el conjunto de* **reglas de sintaxis***: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,*
- X *es el conjunto de* **axiomas***: fórmulas válidas por definición,*
- R *es el conjunto de* **reglas de inferencias***: reglas de transformación que permiten "inferir" una fórmula, la* **conclusión***, a partir de un conjunto de fórmulas, las* **condiciones o premisas**.

Un sistema de demostración S *se puede representar en forma compacta como*

$$S = (A, F, X, R).$$

Definición 5.1.2 (Definición recursiva de teorema) *Un teorema es una fórmula válida (demostrable) y tiene la siguiente definición recursiva:*
una fórmula bien construida φ *es un* **teorema** *si es un axioma o si se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencias a otros teoremas.*

Si φ *es un teorema (es válida), se escribe* $\vdash \varphi$.

Ejemplo 5.1.3 *En el contexto de las implicaciones lógicas (semánticas), estudiamos la validez de la ley de contraposición de la tabla (4.3):*

$$(p \to q) \models (\neg q \to \neg p).$$

Dicimos también que la fórmula

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

es una tautología.
Si somos capaces de demostrar que la ley de contraposición es válida en el sistema axiomático que estamos usando, podemos escribir la misma ley de contraposición en forma de teorema, usando la notación:

$$\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p).$$

Sólo como caso particular, consideremos las dos proposiciones p="como demasiado" y q="me duele el estómago."

La teoría interpretativa, en este caso, nos dice que la proposición "si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado," $(\neg q \to \neg p)$, *es consecuencia lógica (vimos que en realidad es equivalente) de la proposición "si como demasiado me duele el estómago,"* $(p \to q)$.

En una teoría de pruebas la validez de la ley de contraposición se expresaría, en nuestro ejemplo particular, como la validez de la fórmula bien construida "si como demasiado me duele el estómago implica que si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado," $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

Definición 5.1.4 *Una* **deducción o razonamiento** *consiste de un conjunto de fórmulas* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$, *llamadas las* **premisas**, *y de una fórmula* φ, *llamada la* **conclusión** *de la deducción.*

Ejemplo 5.1.5 *Escrita como deducción, la ley de contraposición tiene una sola premisa* $\Phi = \{(p \rightarrow q)\}$ *y conclusión* $(\neg q \rightarrow \neg p)$.

Las nociones de demostración de un teorema y de una deducción están establecidas por las siguientes definiciones:

Definición 5.1.6 (Demostración de fórmulas (de teoremas)) *Una demostración de un teorema* $\vdash \varphi$ *es una sucesión finita de fórmulas*

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi\}$$

tal que:

1. *Cada fórmula de la sucesión es*
   - *un axioma, un teorema ya demostrado o*
   - *un teorema obtenido a partir de las fórmulas anteriores de la sucesión aplicando un conjunto de reglas de inferencias.*
2. *El último elemento de la sucesión es la fórmula* φ.

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi\}$ *es una demostración de un teorema, se dice que* φ *es* **válida (demostrable)** *y se escribe* $\vdash \varphi$.

Definición 5.1.7 (Demostración de deducciones) *Sean* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas proposicionales y* φ *una fórmula.*

Una demostración de una deducción con conjunto de premisas Φ *y conclusión* φ *es una sucesión finita de fórmulas*

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+m-1}, \varphi_{n+m} = \varphi\}$$

tal que:

1. *Cada fórmula de la sucesión es*
   - *una premisa (un elemento de* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$*) o*
   - *un axioma, un teorema ya demostrado o*
   - *un teorema obtenido a partir de las fórmulas anteriores en la sucesión aplicando un conjunto de reglas de inferencias.*
2. *El último elemento de la sucesión es la fórmula* φ.

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots \varphi_{n+m-1}, \varphi_{n+m} = \varphi\}$ *es una demostración de una deducción, se dice que la conclusión* φ *es* **consecuencia lógica (deducible)** *del conjunto de las premisas* Φ *y se escribe* $\Phi \vdash \varphi$.

Observación 5.1.8 *Podemos observar que la demostración de un teorema es la demostración de una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.*

El siguiente teorema es un resultado fundamental ya que permite definir una relación entre demostraciones de teoremas y demostraciones de deducciones. No presentamos aquí su demostración (ver, por ejemplo, el párrafo 2.3 de [C] o el párrafo 3.1.1 de [A]).

Teorema 5.1.9 (Teorema de la deducción) *Sean* $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto de fórmulas y* φ *una fórmula. Entonces*

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \vdash \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \to \varphi).$$

El siguiente corolario del teorema de la deducción establece la relación buscada entre demostraciones de deducciones y de teoremas.

Corolario 5.1.10 *Dada una demostración de una deducción, es siempre posible encontrar una fórmula válida que la represente.*

Demostración [C]: Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \vdash \varphi$ es la demostración de una deducción, se aplica el teorema de la deducción sucesivamente hasta que el conjunto de premisas sea vacío. Se obtiene así la siguiente cadena de fórmulas que tiene como último elemento un teorema:

$$\begin{array}{l}
\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \vdash \varphi \\
\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}\} \vdash \varphi_n \to \varphi \\
\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-2}\} \vdash \varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi) \\
\vdots \\
\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots).
\end{array}$$

Ejemplo 5.1.11 *El teorema de la deducción implica que, en un sistema de pruebas, demostrar la validez de la ley de contraposición*

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

es equivalente a demostrar la deducción

$$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg q \rightarrow \neg p$$

o, también, la deducción

$$\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p.$$

En el caso de nuestro ejemplo particular con p= "como demasiado" y q= "me duele el estómago", la última deducción se lee "si como demasiado me duele el estómago y si no me duele el estómago, entonces no he comido demasiado."

5.1.1 Subdeducciones y notación de Fitting

Antes de definir formalmente el sistema de deducción natural de Gentzen, necesitamos extender la definición de demostración de deducción dada, la (5.1.7), para poder admitir la introducción de subdeducciones. Informalmente se puede decir que, en el proceso de demostración de una deducción (la demostración madre), una subdeducción es la derivación de una conclusión ψ a partir de una premisa auxiliar (o hipótesis) φ. Después de obtener la conclusión buscada en la subdeducción, se remueve la subdeducción de la demostración madre y se sustituye por el resultado $\varphi \vdash \psi$.

Para representar subdeducciónes usaremos la notación de Fitting [F]. Esta notación emplea rectángulos, llamados **cajas**. La primera fila de una caja está ocupada por la premisa auxiliar φ, mientras en la última fila se encuentra la conclusión ψ.

El siguiente es un ejemplo de un esquema de una deducción que contiene a una subdeducción:

1) φ_1 (Premisa)
2) φ_2 (Premisa)
3) $\vdash \varphi_3$ (R1(1): regla R1 aplicada a φ_1)

4) ψ_1 (Premisa auxiliar) 5) $\vdash \psi_2$ (R2(2,1): regla R2 aplicada a φ_2 y ψ_1) 6) $\vdash \psi_3$ (R3(5): regla R3 aplicada a ψ_2)

7) $\vdash \varphi_4$ (R4(4,6): regla R4 aplicada a la subdeducción)

La notación usada en el último paso de la demostración madre, $R4(4,6)$, quiere decir que la regla R4 se aplica a toda la subdeducción. Se citan sólo la premisa auxiliar y la conclusión de ella.

Pronto veremos algunos ejemplos, pero hay que notar que una subdeducción puede contener a su vez una subdeducción. Por tanto, en la representación de Fitting pueden aparecer varios rectángulos encajados.

5.2 El sistema de deducción natural de Gentzen

El sistema de demostración natural de Gerald Gentzen (1934) es el sistema que mejor modela el razonamiento informal o intuitivo.

Este sistema se basa en deducciones y tiene ocho reglas de inferencia y ningún axioma. Las reglas de inferencia son dos para cada conectivo lógico del alfabeto (una de introducción y otra de eliminación).

El uso exclusivo de deducciones presupone razonamientos que siempre dependen de unas premisas iniciales, no necesariamente válidas. Se podría decir que el sistema de Gentzen simula el razonamiento coherente más que el razonamiento válido.

5.2.1 Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Definición 5.2.1 *El sistema de deducción natural de Gentzen es el sistema de demostración axiomático*

$$\mathbf{G} = (A, F, X, R),$$

donde

A *: el alfabeto está compuesto por*

- *los símbolos* p, q, r, s, $t, \ldots$ *de proposiciones atómicas,*
- *los símbolos de conectivos* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$,
- *los símbolos de paréntesis* (,) .

F *: el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define recursivamente como*

At *: toda proposición atómica es una fbc,*

$\neg$ *: Si* φ *es una fbc entonces* $\neg\varphi$ *es una fbc,*

$\circ$ *: si* φ *y* ψ *son dos fbc, entonces*

$$\varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \varphi$$

son fbc.

Toda fbc se obtiene mediante las tres reglas anteriores.

NOTA: *En lo que se sigue usaremos también el conectivo de coimplicación entre dos fórmulas,* $\varphi \leftrightarrow \psi$*. Este conectivo se entenderá como una forma abreviada de representar la fórmula bien construida* $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

X *: el conjunto de los axiomas es vacío.*

R *: el conjunto* R *de las reglas de inferencia está compuesto por las reglas de introducción y de eliminación que se describen a continuación.*

Reglas del sistema de Gentzen:

(I $\wedge$): Regla de introducción de la conjunción

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

(E $\wedge$): Regla de eliminación de la conjunción

$$\begin{array}{ll} \varphi \wedge \psi \vdash \varphi & \textit{(eliminación derecha)} \\ \varphi \wedge \psi \vdash \psi & \textit{(eliminación izquierda)} \end{array}$$

De una conjunción de dos fórmulas se deducen las dos fórmulas.

Ejemplo 5.2.2 *[UNED1] Usando sólo las dos reglas anteriores podemos demostrar que*

$$p \wedge (q \wedge r) \vdash p \wedge r.$$

$$\begin{array}{lll} \textit{1)}\ \varphi_1 : & p \wedge (q \wedge r) & \textit{(Premisa)} \\ \textit{2)} \vdash \varphi_2 : & \vdash p & \textit{(E} \wedge \textit{(1))} \\ \textit{3)} \vdash \varphi_3 : & \vdash q \wedge r & \textit{(E} \wedge \textit{(1))} \\ \textit{4)} \vdash \varphi_4 : & \vdash r & \textit{(E} \wedge \textit{(3))} \\ \textit{5)} \vdash \varphi_5 : & \vdash p \wedge r & \textit{(I} \wedge \textit{(2,4))} \end{array}$$

(I $\vee$): Regla de introducción de la disyunción

$$\begin{array}{ll} \varphi \vdash (\varphi \vee \psi) & \textit{(introducción derecha)} \\ \psi \vdash (\varphi \vee \psi) & \textit{(introducción izquierda)} \end{array}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir de cada una de ellas.

(E $\vee$): Regla de eliminación de la disyunción

NOTA: *la regla de eliminación de la disyunción* **NO** *es*

$$\begin{array}{l} \varphi \vee \psi \vdash \varphi \\ \varphi \vee \psi \vdash \psi, \end{array}$$

ya que de la validez de una disyunción de dos fórmulas no se puede deducir la validez de las dos fórmulas. Sólo sabemos que al menos una de las dos es válida, sin saber cuál es.

La regla de eliminación de la disyunción es

$$(E\vee):\{\varphi\vee\psi,\varphi\rightarrow\chi,\psi\rightarrow\chi\}\vdash\chi.$$

Esta regla se usa en el **método de demostración por casos**, *que se aplica cuando se quiere demostrar una deducción del tipo* $\varphi\vee\psi\vdash\chi$:

1) se introducen las premisas auxiliares φ *y* ψ,

2) usando las dos premisas auxiliares se intentan demostrar dos subdeducciones independientes con igual conclusión χ, *es decir, las subdeducciones*

$$\varphi\vdash\chi \qquad y \qquad \psi\vdash\chi,$$

3) si se ha completado el paso anterior, se usan las subdeducciones obtenidas en la deducción madre y se obtiene que

$$\{\varphi\vee\psi,\varphi\rightarrow\chi,\psi\rightarrow\chi\}\vdash\chi.$$

Con la notación de Fitting (E $\vee$*) se representa como:*

$\varphi\vee\psi$ *(Premisa)*

<table>
<tr>
<td>φ (Premisa auxiliar)
$\vdots$
$\vdots$
$\vdash\chi$</td>
<td>ψ (Premisa auxiliar)
$\vdots$
$\vdots$
$\vdash\chi$</td>
</tr>
</table>

$\vdash\chi$

Ejemplo 5.2.3 *[UNED1] Si queremos demostrar la propiedad distributiva de la conjunción*

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

podemos usar el siguiente esquema:

1) $p \wedge (q \vee r)$ *(Premisa)*
2) $\vdash p$ *(E* $\wedge(1)$*)*
3) $\vdash q \vee r$ *(E* $\wedge(1)$*)*

4) q *(Premisa auxiliar)* *5)* $\vdash p \wedge q$ *(I* $\wedge(2,4)$*)* *6)* $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(I* $\vee(5)$*)*	r *(Premisa auxiliar)* $\vdash p \wedge r$ *(I* $\wedge(2,4)$*)* $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(I* $\vee(5)$*)*

7) $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(E* $\vee(3,(4,5))$*)*

(I ¬): Regla de introducción de la negación

$$(I\neg) : \{\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \neg\varphi.$$

Esta regla se usa en **demostraciones por reducción al absurdo** *de la validez de una fórmula* $\neg\varphi$ *:*

1) Tomamos como premisa auxiliar la fórmula φ*,*

2) Si de esta premisa auxiliar podemos deducir la validez de una contradicción $\psi \wedge \neg\psi$*, entonces podemos afirmar la validez de* $\neg\varphi$*.*

Con la notación de Fitting (I ¬) se representa como:

φ *(Premisa auxiliar)* $\vdots$ $\vdots$ $\vdash \psi \wedge \neg\psi$

$\vdash \neg\varphi$

Usaremos esta regla en el ejemplos (5.2.4)

(E ¬): Regla de eliminación de la doble negación

$$(E\neg) : \neg\neg\varphi \vdash \varphi.$$

(I →): Regla de introducción de la implicación

Para definir esta regla

1) se toma una premisa auxiliar φ,

2) si se demuestra que de φ *se deduce una fórmula* ψ, *entonces se ha demostrado la validez de* $\varphi \to \psi$.

Con la notación de Fitting $(I \to)$ *se representa como:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi & \textit{(Premisa auxiliar)} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdash \psi & \end{array}}$$

$$\vdash \varphi \to \psi$$

Esta última regla es una versión del **teorema de la deducción** *(5.1.9).*

Usaremos esta regla en el ejemplos (5.2.4)

(E →): Regla de eliminación de la implicación (también Modus Ponens):

$$(E \to) : \{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi.$$

Usaremos esta regla en el ejemplos (5.2.4)

El sistema de Gentzen está ahora completamente definido.

Ejemplos 5.2.4 *1) Si queremos demostrar la contraposición*

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi,$$

podemos escribir el siguiente esquema:

1) $\varphi \to \psi$ *(Premisa)*
2) $\neg\psi$ *(Premisa)*

3) $\neg\neg\varphi$ *(Premisa auxiliar)*
4) $\vdash \varphi$ *(E* $\neg$*(3))*
5) $\vdash \psi$ *(E* $\to$*(3,1))*
6) $\vdash \psi \wedge \neg\psi$ *(I* $\wedge$*(4,2))*

7) $\vdash \neg\varphi$ *(I* $\neg$*(3,5))*

2) La validez de la fórmula

$$\varphi \vdash \psi \to \varphi$$

se puede demostrar en el sistema de deducción natural usando la introducción de la implicación, según el esquema:

1) φ *(Premisa)*

2) ψ *(Premisa auxiliar)*
3) $\vdash \varphi$ *(1)*

4) $\vdash \psi \to \varphi$ *(I* $\to$ *(2,3))*

3) La validez de la fórmula

$$\{\varphi \to \psi,\, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi$$

se puede demostrar en el sistema de deducción natural usando la introducción de la implicación, según el esquema:

1) $\varphi \to \psi$ *(Premisa)*
2) $\varphi \to (\psi \to \chi)$ *(Premisa)*

3) φ *(Premisa auxiliar)*
4) $\vdash \psi$ *(E* $\to$ *(3,1))*
5) $\vdash \psi \to \chi$ *(E* $\to$ *(3,2))*
6) $\vdash \chi$ *(E* $\to$ *(4,5))*

7) $\vdash \varphi \to \chi$ *(I* $\to$ *(3,6))*

5.2.2 Reglas derivadas del sistema de Gentzen

A partir de la definición del sistema de Gentzen es posible demostrar los resultados más interesantes de la lógica proposicional. Vamos a enunciar una larga lista de ellos para poder mirar a varios ejemplos de demostración y aprender como aplicar estas nuevas reglas.

Presentaremos sólo algunas de las demostraciones de estas deducciones, las demás se pueden encontrar en la bibliografía de estos apuntes.

- **T1: Teorema de la identidad**

$$\varphi \vdash \varphi$$

De toda fórmula se deduce ella misma.

Esta deducción se puede demostrar por reducción al absurdo:

1) φ (Premisa)

2) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar)
3) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ (I $\wedge$ (1,2))

4) $\vdash \varphi$ (I $\neg$ (2,3))

- **T2: Regla del silogismo**

$$\{\varphi \to \psi,\, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$$

De dos implicaciones ($\varphi \to \psi$ y $\psi \to \chi$) tales que la conclusión de la primera es la premisa de la segunda se deduce la implicación de la premisa de la primera fórmula a la conclusión de la segunda.

Este teorema se puede pensar como una propiedad transitiva: de "todos los hombres son animales" y "todos los animales son mortales" se deduce que "todos los hombres son mortales."

- **T3: Modus ponens, MP**

$$\{\varphi,\, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$$

Es la regla de eliminación de la implicación: de una implicación y de su premisa se deduce su conclusión.

Por ejemplo, de "Juan es un hombre" y "si Juan es un hombre entonces es mortal" se deduce que "Juan es mortal."

- **T4: Excontradictione Quodlibet**

$$\{\varphi,\, \neg\varphi\} \vdash \psi$$

De una fórmula y de su negación se deduce cualquier fórmula (por reducción al absurdo).

De "Juan es un hombre" y "Juan no es un hombre" se deduce que "la pared es blanca."

- **T5: Producto condicional**

$$\{\varphi \to \psi,\, \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi \wedge \chi$$

De dos implicaciones con la misma premisa se deduce la implicación de esa premisa a la conjunción de sus conclusiones.

Por ejemplo, de "si x es par, es divisible por dos" y "si x es par, no es impar" se deduce que "si x es par, entonces x es divisible por dos y no es impar."

- **T6: Contraposición**

$$\text{T6.1)} \quad \varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

$$\text{T6.2)} \quad \varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$$

$$\text{T6.3)} \quad \neg\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \varphi$$

De una implicación se deduce su contrapositiva (ver ejemplo (5.2.4)).

Por ejemplo,

T6.1) de "llevo paraguas sólo si llueve" se deduce que "si no llueve no llevo paraguas,"

T6.2) de "llevo paraguas sólo si no hace sol" se deduce que "si hace sol no llevo paraguas."

T6.3) de "no llevo paraguas sólo si hace sol" se deduce que "si no hace sol llevo paraguas."

- **T7: Interdefinición 1**

$$\text{T7.1)} \quad \varphi \to \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

De una implicación se deduce la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

$$\text{T7.2)} \quad \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \to \psi$$

Es el recíproco del anterior: una implicación se deduce de la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

Por ejemplo,

T7.1) de "llevo paraguas sólo si llueve" se deduce que "no es posible que lleve paraguas y no llueva,"

T7.2) de "no es posible que lleve paraguas y no llueva" se deduce que "llevo paraguas sólo si llueve."

- **T8: Leyes de de Morgan**

$$\text{T8.1)} \quad \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

De la negación de la disyunción de dos fórmulas se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas.

$$\text{T8.2)} \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la conjunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la disyunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.1) de "no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B" se deduce que "x no es elemento de A y x no es elemento de B,"

T8.2) de "x no es elemento de A y x no es elemento de B" se deduce que "no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B."

$$\text{T8.3)} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$$

De la negación de la conjunción de dos fórmulas se deduce la disyunción de las negaciones de las mismas.

$$\text{T8.4)} \quad \neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la disyunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la conjunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.3) de "no es posible que x sea un elemento de A y de B" se deduce que "x no es elemento de A o x no es elemento de B,"

T8.4) de "x no es elemento de A o x no es elemento de B" se deduce que "no es posible que x sea un elemento de A y de B."

- **T9: Interdefinición 2**

$$\text{T9.1)} \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$$

De una implicación se deduce la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

$$\text{T9.2)} \quad \neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Es la recíproca de la anterior: una implicación se deduce de la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

Por ejemplo,

T9.1) de “una función derivable es continua” se deduce que “una función no es derivable o es continua,”

T9.2) de “una función no es derivable o es continua” se deduce que “una función derivable es continua.”

Ejemplo 5.2.5 *Para verificar que la fórmula*

$$\varphi : p \to (q \to p),$$

del ejemplo (4.6.4) es válida en el sistema de Gentzen podemos usar la regla $(I\neg)$ *de reducción al absurdo. Tendremos que demostrar que la fórmula* $\neg\varphi$ *conduce a una contradicción.*

En la notación de Fitting:

1) $\neg(p \to (q \to p))$ *(Premisa auxiliar)* *2)* $\vdash \neg(\neg p \vee (q \to p))$ *(Interdefinición 2(1) y Contraposición (1))* *3)* $\vdash \neg\neg p \wedge \neg(q \to p)$ *(Ley de de Morgan T8.1(2))* *4)* $\vdash \neg\neg p$ *(E* $\wedge$*(3))* *5)* $\vdash \neg(q \to p)$ *(E* $\wedge$*(3))* *6)* $\vdash p$ *(E* $\neg$*(4))* *7)* $\vdash \neg(\neg q \vee p)$ *(Interdefinición 2(5) y Contraposición (5))* *8)* $\vdash \neg\neg q \wedge \neg p$ *(Ley de de Morgan T8.3(7))* *9)* $\vdash \neg p$ *(E* $\wedge$*(8))* *10)* $\vdash p \wedge \neg p$ *(I* $\wedge$*(6,9))*

11) $\vdash p \to (q \to p)$ *(I* $\neg$*(1,10))*

Teoremas del conectivo conjunción

- **T10: Propiedad conmutativa**

$$\text{T10.1)} \quad \varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$$

$$\text{T10.2)} \quad \psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$$

- **T11: Propiedad asociativa**

$$\text{T11.1)} \quad \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\text{T11.2)} \quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$$

- **T12: Propiedad distributiva**

$$\text{T12.1)} \quad \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\text{T12.2)} \quad (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$$

- **T13: Propiedad de absorción**

$$\text{T13.1)} \quad \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$$

De la conjunción de una fórmula φ con su disyunción con cualquier otra fórmula se deduce φ.

$$\text{T13.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la conjunción de ella con su disyunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T13.1) de "x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B" se deduce que "x es un elemento de A,"

T13.2) de "x es un elemento de A" se deduce que "x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B."

Demostración de T13.1:

Tenemos que verificar que

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$$

$$\begin{array}{ll} 1) & \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \quad \text{(Premisa)} \\ 2) & \vdash \varphi \quad \text{(E } \wedge (1)) \end{array}$$

- **T14: Idempotencia**

$$\text{T14.1)} \quad \varphi \wedge \varphi \vdash \varphi$$

$$\text{T14.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \wedge \varphi$$

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

Teoremas del conectivo disyunción

- **T15: Propiedad conmutativa**

$$\text{T15.1)} \quad \varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$$

$$\text{T15.2)} \quad \psi \vee \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

- **T16: Propiedad asociativa**

$$\text{T16.1)} \quad \varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\text{T17.2)} \quad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

- **T17: Propiedad distributiva**

$$\text{T17.1)} \quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$\text{T17.2)} \quad (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$$

- **T18: Propiedad de absorción**

$$\text{T18.1)} \quad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$$

De la disyunción de una fórmula φ con su conjunción con cualquier otra fórmula se deduce φ.

$$\text{T18.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la disyunción de ella con su conjunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T18.1) de "x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B" se deduce que "x es un elemento de A,"

T18.2) de "x es un elemento de A" se deduce que "x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B."

- **T19: Idempotencia**

$$\text{T19.1)} \quad \varphi \vee \varphi \vdash \varphi$$

$$\text{T19.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \vee \varphi$$

Teoremas del conectivo coimplicación

- **T20: Introducción de la coimplicación**

$$\{\varphi \to \psi,\, \psi \to \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

La coimplicación (doble implicación) entre dos fórmulas se deduce de las dos implicaciones que tienen estas dos fórmulas como premisa y conclusión y como conclusión y premisa, respectivamente.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T21: Eliminación de la coimplicación**

$$\text{T21.1)} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$$

$$\text{T21.2)} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$$

De una coimplicación entre dos fórmulas se deducen las implicaciones de cada una a la otra.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T22: Propiedad reflexiva**

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$$

Toda fórmula coimplica a sí misma.

- **T23: Propiedad transitiva**

$$\{\varphi \leftrightarrow \psi,\, \psi \leftrightarrow \chi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$$

Si una fórmula φ coimplica a una fórmula ψ y si ψ coimplica a una fórmula χ, entonces φ coimplica a χ.

- **T24: Propiedad simétrica**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$$

De φ coimplica a ψ se deduce que ψ coimplica a φ.

Observación 5.2.6 *Sea R la relación binaria sobre L definida por la coimplicación:*

$$(\varphi, \psi) \in R \quad \textit{si y sólo si} \quad \varphi \leftrightarrow \psi.$$

La validez de la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva para esta relación implica que R es una relación de equivalencia entre fórmulas proposicionales.

Teoremas del conectivo implicación

- **T25: Importación-Exportación**

$$\text{T25.1)} \quad \{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$$

De una implicación cuya conclusión es la implicación $\psi \to \chi$ y de la conjunción de las dos premisas $\varphi \wedge \psi$ se deduce la conclusión χ.

$$\text{T25.2)} \quad \{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$$

Es la recíproca del anterior: de una implicación cuya premisa es la conjunción de dos fórmulas se deduce la implicación de una de las dos premisas a la implicación de la otra premisa a la conclusión.

Ejemplo 5.2.7 *Sean*

$p =$ *n es un número natural,*
$q =$ *n es par,*
$r =$ *el cuadrado de n es par.*

Entonces,

T25.1) de "si n es número natural, entonces si n es par su cuadrado es par" y de "si n es un número natural y es par", se deduce que "el cuadrado de n es par,"

T25.2) de "si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par" y de "n es número natural, se deduce que "si n es par, su cuadrado es par."

Demostración de T25.1:

Tenemos que verificar que

$$\{\varphi \to (\psi \to \chi),\, \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi.$$

1) $\varphi \to (\psi \to \chi)$ (Premisa)
2) $\varphi \wedge \psi$ (Premisa)
3) $\vdash \varphi$ (E $\wedge$(2))
4) $\vdash \psi \to \chi$ (E $\to$(3,1))
5) $\vdash \psi$ (E $\wedge$(2))
6) $\vdash \chi$ (E $\to$(5,4))

- **T26: Mutación de premisa**

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$$

Demostración de T26:

1) $\varphi \to (\psi \to \chi)$ (Premisa)

2) ψ (Premisa auxiliar)

3) φ (Premisa auxiliar)
4) $\vdash \psi \to \chi$ (E $\to$(3,1))
5) $\vdash \chi$ (E $\to$(2,4))

6) $\vdash \varphi \to \chi$ (I $\to$ (3,5))

7) $\vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ (I $\to$ (2,6))

- **T27: Carga de premisa**

$$\varphi \vdash (\psi \to \varphi)$$

Demostración de T27:

1) φ (Premisa)

$$\boxed{\begin{array}{l} 2)\ \psi \quad \text{(Premisa auxiliar)} \\ 3) \vdash \varphi \quad \text{(Teorema de la identidad, T1(1))} \end{array}}$$

4) $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ (I $\rightarrow$ (2,3))

- **T28: Modus tollens, MT**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Notar que esta regla es la contraposición.

Demostración de T28: la demostración es la misma vista en el apartado 1) del ejemplo (5.2.4).

- **T29: Tollendo ponens**

$$\{\varphi \vee \psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$$

Demostración de T29:

1) $\varphi \vee \psi$ (Premisa)
2) $\neg\psi$ (Premisa)

3) φ (Premisa auxiliar)
4) $\vdash \varphi$ (Teorema de la identidad, T1(3))

5) ψ (Premisa auxiliar)
6) $\vdash \psi \wedge \neg\psi$ (I $\wedge$ (2,5))
7) $\vdash \varphi$ (Excontraditione Quodlibet, T4(6))

8) $\vdash \varphi$ (E $\vee$ (1,(3,4),(5,7)))

- **T30: Dilemas**

T30.1) : Dilema constructivo simple:
$\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash \chi$,

T30.2) : Dilema constructivo complejo:
$\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma$,

T30.3) : Dilema destructivo simple:
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg\chi$,

T30.4) : Dilema destructivo complejo:
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \varphi, \sigma \to \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$,

Demostración de T30:

T30.1) : $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash \chi$

Es la regla de eliminación de la disyunción (E $\vee$).

T30.2) : $\{\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma$

1) $\varphi \vee \psi$ (Premisa)
2) $\varphi \rightarrow \chi$ (Premisa)
3) $\psi \rightarrow \sigma$ (Premisa)

4) φ (Premisa auxiliar)
5) $\vdash \chi$ (E $\rightarrow$(4,2))
6) $\vdash \chi \vee \sigma$ (I $\vee$(5))

7) ψ (Premisa auxiliar)
8) $\vdash \sigma$ (E $\rightarrow$(7,3))
9) $\vdash \chi \vee \sigma$ (I $\vee$(8))

10) $\vdash \chi \vee \sigma$ (E $\vee$ (1,(4,6),(7,9)))

T30.3) $: \{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi$

1) $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Premisa)
2) $\chi \rightarrow \varphi$ (Premisa)
3) $\chi \rightarrow \psi$ (Premisa)

4) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar)
5) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(2,4))

6) $\neg\psi$ (Premisa auxiliar)
7) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(3,6))

8) $\vdash \neg\chi$ (E $\vee$ (1,(4,5),(6,7)))

T30.4) $: \{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \sigma \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$

1) $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Premisa)
2) $\chi \to \varphi$ (Premisa)
3) $\sigma \to \psi$ (Premisa)

4) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar)
5) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(2,4))
6) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (I $\vee$(5))

7) $\neg\psi$ (Premisa auxiliar)
8) $\vdash \neg\sigma$ (Modus Tollens, MT(3,7))
9) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (I $\vee$(8))

10) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (E $\vee$ (1,(4,6),(7,9)))

En el siguiente ejemplo vamos a emplear la regla $(I\neg)$ para demostrar la validez de una fórmula por refutación.

Ejemplo 5.2.8 *Para verificar que la fórmula*

$$\varphi : p \to (q \to p),$$

del ejemplo (4.6.4) es válida en el sistema de Gentzen podemos usar la regla $(I\neg)$: *tendremos que demostrar que la fórmula* $\neg\varphi$ *conduce a una contradicción.*

En la notación de Fitting:

1) $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ *(Premisa auxiliar)*
2) $\vdash \neg(\neg p \vee (q \rightarrow p))$ *(Interdefinición 2(1))*
3) $\vdash \neg\neg p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ *(Ley de de Morgan T8.1(2))*
4) $\vdash \neg\neg p$ *(E* $\wedge$*(3))*
5) $\vdash \neg(q \rightarrow p)$ *(E* $\wedge$*(3))*
6) $\vdash p$ *(E* $\neg$*(4))*
7) $\vdash \neg(\neg q \wedge p)$ *(Interdefinición 2(5))*
8) $\vdash q \vee \neg p$ *(Ley de de Morgan T8.3(7))*
9) $\vdash \neg p$ *(E* $\wedge$*(8))*
10) $\vdash p \wedge \neg p$ *(I* $\wedge$*(6,9))*

11) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ *(I* $\neg$*(1,10))*

En la sección (5.4) veremos que existen teoremas que demuestran la equivalencia entre la teoría interpretativa (semántica) y el sistema de deducción natural.

Esta equivalencia entre teorías nos permite elegir, en cada caso, entre el método más adecuado o eficiente para desarrollar una demostración.

5.3 Tableaux sintácticos

Podemos observar que la definición recursiva de tableaux semántico asociado a un conjunto de fórmulas no requiere, en ningún paso, el cálculo de los valores de verdad de las fórmulas consideradas. Eso quiere decir que el método de refutación de los tableaux es, en realidad, un método de demostración sintáctico.

Los **tableaux sintácticos** usan el método de refutación para derivar la validez de un razonamiento o de una fórmula, sin tener que tomar en consideración los valores de verdad de las fórmulas en estudio. Permiten demostrar teoremas y deducciones.

Ejemplo 5.3.1 *En el ejemplo (4.6.9) demostramos la implicación lógica*

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \models \neg q.$$

Teniendo en cuenta las equivalencias entre fórmulas definidas por la coimplicación de la teoría axiomática, la misma secuencia de tableaux empleada en ese ejemplo demuestra la deducción

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \vdash \neg q,$$

o, por el teorema de la deducción, el teorema

$$\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)).$$

5.4 Completitud, corrección y decidibilidad

Para cualquier sistema axiomático es siempre imprescindible estudiar si éste cumple las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad. Las dos primeras propiedades permiten estudiar la relación del sistema con la semántica del lenguaje y la tercera es una propiedad algorítmica.

Las demostraciones de la validez de estas propiedades para los sistemas de la lógica proposicional son complejas y fuera del alcance de esta asignatura. Nos limitaremos a enunciar los principales teoremas relacionados.

- **Completitud**

  Se dice que un sistema de demostración axiomático es **completo** si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida (una tautología) y deducir cualquier consecuencia lógica.

  Teorema de Kalmar [A]: toda tautología en teoría interpretativa es una fórmula válida en teoría de la demostración.

  El sistema de Gentzen es completo.

  Considerando la definición sintáctica de la teoría de los tableaux para un conjunto arbitrario de fórmulas (posiblemente infinito), se puede demostrar que el sistema axiomático así obtenido es completo [HLR].

- **Corrección**

  Se dice que un sistema de demostración es **correcto (consistente, coherente)** si todas las fórmulas demostrables en el sistema son tautologías y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

  Teorema de Post [A]: toda fórmula válida en teoría de la demostración es una tautología en teoría interpretativa.

  El sistema de Gentzen y la definición sintáctica de la teoría de los tableaux son sistemas correctos [HLR] y [MH].

- **Decidibilidad**

  Se dice que un sistema de demostración es **decidible** si proporciona un procedimiento general y finito (aplicable a cualquier fórmula y que termine) que permita decidir si una fórmula es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

  Los teoremas anteriores permiten afirmar que una fórmula proposicional es un teorema si y sólo si es una tautología.

  Por tanto la evaluación de la tabla de verdad es un procedimiento general y finito de decisión de la validez de una fórmula [A].

  Es también posible demostrar que el método de los tableaux, en su definición más general, tiene las mismas propiedades de generalidad y finitud [HLR] que las tablas de verdad.

  Se sigue que los sistemas formales de la lógica proposicionales son decidibles.

En conclusión, los sistemas formales de la lógica proposicional (la lógica de orden 0) son completos, correctos y decidibles.

Las lógicas de orden superior son más generales, pero pierden algunas de estas propiedades. Veremos que la lógica de predicados (de primer orden) es completa y correcta, pero no es decidible.

5.5 Ejercicios

Ejercicio 5.5.1 *Usando el sistema de deducción natural, demuestra la idempotencia de la conjunción (T14), la introducción del coimplicador (T20) y la eliminación del coimplicador (T21).*

Ejercicio 5.5.2 *Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de deducción natural:*

1. $\neg\neg p \equiv p$

2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

3. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

4. $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$

5. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

Ejercicio 5.5.3 *Formaliza los siguientes razonamientos:*

1. *Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.*

2. *Si f es diferenciable en $[a,b]$, es continua y acotada en $[a,b]$. Si f no fuese acotada en $[a,b]$ no podría ser diferenciable en $[a,b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a,b]$, no es diferenciable en $[a,b]$.*

Ejercicio 5.5.4 *Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.*

Ejercicio 5.5.5 *Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:*

1. $\{(p \wedge q) \to r,\ \neg(p \vee r) \to s,\ p \to q\} \vdash \neg s \to r$

2. $\{r \to p,\ \neg q \to \neg r,\ s \to q,\ (p \wedge q) \to t,\ \neg s \vee p\} \vdash (r \vee s) \to t$

3. $\{p \to (q \to r),\ \neg s \vee p,\ q\} \vdash s \to r$

4. $\{s \to (t \to u),\ u \to \neg u,\ (v \to s) \wedge (p \to t)\} \vdash v \to \neg p$