

# LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2026

## PRÁCTICO 3: LÓGICA PROPOSICIONAL

### DEDUCCIÓN NATURAL

#### Ejercicio 1:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra:

1.  $(\varphi \wedge \varphi) \vdash \varphi$  (idempotencia 1)
2.  $\varphi \vdash (\varphi \wedge \varphi)$  (idempotencia 2)
3.  $\{(\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi)\} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$  (introducción de la coimplicación)
4.  $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$  (eliminación de la coimplicación 1)
5.  $(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$  (eliminación de la coimplicación 2)

#### Ejercicio 2:

Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:

1.  $\{(p \wedge q), r\} \vdash (q \vee r)$
2.  $\{(\neg p \wedge q), ((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p))\} \vdash (r \vee \neg p)$
3.  $\{p, \neg\neg(q \wedge r)\} \vdash (\neg\neg p \wedge r)$
4.  $\{p, (p \rightarrow q), (p \rightarrow (q \rightarrow r))\} \vdash r$
5.  $\{(p \rightarrow (q \rightarrow r)), p, \neg r\} \vdash \neg q$
6.  $\{(p \wedge q)\} \vdash (p \wedge (q \vee r))$
7.  $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \vdash (p \rightarrow r)$
8.  $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow r), (r \rightarrow s)\} \vdash (p \rightarrow s)$
9.  $\{(p \rightarrow \neg q), (r \rightarrow q)\} \vdash \neg(p \wedge r)$
10.  $\{\neg p\} \vdash (p \rightarrow q)$
11.  $\{(p \rightarrow q)\} \vdash (\neg p \vee q)$

#### Ejercicio 3:

Formaliza los siguientes razonamientos:

1. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.
2. Si  $f$  es diferenciable en  $[a, b]$ , es continua y acotada en  $[a, b]$ . Si  $f$  no fuese acotada en  $[a, b]$  no podría ser diferenciable en  $[a, b]$ . Por tanto: si  $f$  es discontinua y acotada en  $[a, b]$ , no es diferenciable en  $[a, b]$ .

**Ejercicio 4:**

Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.

**Ejercicio 5:**

Resolver utilizando el Teorema de la deducción:

1.  $\vdash ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
2.  $\vdash ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$
3.  $\vdash (((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

**Ejercicio 6:**

Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de Deducción Natural:

1.  $\neg\neg p \equiv p$
2.  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
3.  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
4.  $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
5.  $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$

**Ejercicio 7:**

Probar  $\{(p \rightarrow (\neg q \vee r))\} \models (q \rightarrow \neg(p \wedge \neg r))$ :

1. Semánticamente, con el concepto de consecuencia lógica.
2. Construyendo una demostración con las reglas del cálculo de Deducción Natural y justificando el resultado con el teorema de la Corrección.