LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

LÓGICA PROPOSICIONAL

SISTEMAS DEDUCTIVOS

UNSL

- Estudiamos el método de los *Árboles de Refutación* y el método de la *Tablas de Verdad* como métodos para verificar la validez de fórmulas y deducciones.

La *teoría de la demostración* o *teoría de pruebas* proporciona métodos alternativos para averiguar:

- *La validez de una fórmula proposicional*: si P es una fórmula válida se dice que es ***demostrable*** y se escribe: $\vdash P$.

- *Si una fórmula P es consecuencia lógica de un conjunto de premisas S* : si *P* es consecuencia lógica de *S* se dice que *P* es ***deducible*** en el sistema a partir de *S* y se escribe: $S \vdash P$.

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

- En un sistema *deductivo* o *de demostración* se utiliza una secuencia *finita* de pasos y, en cada uno de ellos, se aplican las *reglas de inferencia* del sistema para demostrar la validez de una fórmula o de una deducción.

- Un sistema deductivo o de demostración puede ser *directo* o *indirecto* (por *refutación*).

  - *Sistemas directos:* aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.

  - *Sistemas de demostración indirectos* (o por *refutación*): aplican la técnica de reducción al absurdo.

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

⌘ *Sistemas directos:* aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.

- ❖ Son los más naturales.
- ❖ Son adaptables a lógicas no clásicas.
- ❖ Son de difícil automatización.

Tablas de Verdad

⌘ *Sistemas indirectos* (por *refutación*): aplican la técnica de reducción al absurdo para demostrar una fórmula.

- ❖ Son más modernos
- ❖ Son adecuados para su automatización
- ❖ No son aplicables a lógicas distintas de las lógicas clásicas.

Árboles de Refutación

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

- A los sistemas deductivos también se los llama *axiomáticos*, porque la mayoría se basan en *axiomas.*

- *Axiomas:* definen las propiedades básicas de los objetos de la teoría estudiada, y se consideran *verdaderas*, aunque *no* se demuestran.

- Los axiomas de toda teoría tienen que ser:

  - *Compatibles*: a partir de ellos *no debe ser posible* deducir una contradicción.

  - *Independientes*: ningún axioma se debe poder deducir a partir del resto de ellos (habría redundancia de axiomas)

  - *Suficientes*: a partir de ellos debe ser posible deducir todas las propiedades que necesitamos.

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

⌘ Para especificar un *sistema de demostración formal S,* se requieren:

1. *A*: un *alfabeto* de símbolos, conjunto de símbolos que se pueden utilizar para expresar algo.

2. *F*: un conjunto de *reglas de sintaxis* que permiten generar secuencias *finitas* de símbolos llamadas *fórmulas bien formadas*.

3. *X*: un conjunto de fórmulas bien formadas llamadas *axiomas*, las cuales son válidas por definición.

4. *R*: un conjunto *finito* de *reglas de deducción*, son reglas de transformación que permiten *inferir* una fórmula (*conclusión*) a partir de un conjunto de fórmulas (*condiciones o premisas*).

$$S = (A, F, X, R)$$

⌘ Una *demostración* de la *fbf* *P* en el sistema *S* es una *sucesión finita* de *fbfs*:

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$$

tal que para todo *i*, 1≤ *i* ≤ *n*,

- Q_i es un axioma de *S*, o un teorema ya demostrado.
- Q_i *s*e obtiene aplicando alguna regla de deducción a miembros anteriores de la sucesión Q_j , con *j* < *i* .
- El último elemento de la sucesión es la fórmula *P* ($Q_n = P$)

⌘ Entonces decimos que:

- La sucesión de *fbfs* es una ***demostración*** de *P* en *S*.
- P es un ***teorema*** de S .

- Entonces, una fórmula P es un *teorema* si se obtiene a partir de una demostración. Por lo tanto:

    - P es un axioma de *S.*
    - P se se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencia a otros teoremas.

- Si P es un teorema decimos que es *válida*, es *demostrable* y formalmente se escribe:

$$\boxed{\vdash P}$$

Ejemplo:

$\{P\} \models$ Q *si solo si* $(P \to Q)$ es una tautología, entonces en un sistema deductivo se escribe:

$\vdash (P \to Q)$

Sea T un conjunto de *fbfs* de S (pueden ser axiomas, teoremas o *fbfs*).

- Llamaremos *deducción* de P en S a partir de T, a la sucesión finita de *fbfs* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ tal que para todo i, 1£i£n, se verifica alguna de las siguientes condiciones:

  - Q_i es un axioma de S o un teorema ya demostrado.
  - Q_i es una *premisa*, es decir un elemento de T.
  - Q_i se deduce de miembros anteriores de la sucesión Q_j (j < i) como consecuencia directa de aplicar reglas de deducción a los mismos.

  - El último elemento de la sucesión *es la fórmula P* ($Q_n = P$)

- Entonces decimos que:

P es *deducible* en *S* a partir de T

- Entonces, si una fórmula P es *deducible* a partir del conjunto T, diremos que:

P es la *conclusión* del conjunto de las *premisas* T

- Si P es la conclusión de una *deducción* a partir de las premisas T formalmente se escribe:

$$\boxed{T \vdash P}$$

Ejemplo:

$\{P\} \models$ Q *si solo si* $(P \to Q)$ es una tautología, entonces en un sistema deductivo se escribe:

$\{P\} \vdash Q$

Observaciones:

- Una *demostración* es una deducción a partir del conjunto $\varnothing$.
- En una *deducción*, las *fbfs* de *T* son consideradas temporalmente válidas.

En símbolos:

$T \vdash_S P$ significa que *P* es *deducible* a partir de *T* en *S*

$\varnothing \vdash_S P$ significa que *P* es *teorema* de *S*

⌘ *Teorema de la Deducción* **(forma sintáctica)**

$$T \cup \{P\} \vdash_S Q \quad \textit{si y solo si} \quad T \vdash_S (P \to Q)$$

siendo P y Q *fbfs* de S y T un conjunto de *fbfs* de S .

Es decir que si $T = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$

Entonces $T \cup \{P\} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P\}$, luego

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P\} \vdash_S Q \quad \textit{si y solo si} \quad \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \vdash_S (P \to Q)$$

El siguiente corolario del teorema de la deducción establece la relación buscada entre demostraciones de teoremas y deducciones.

⌘ Corolario

Dada una deducción, es siempre posible encontrar una *fórmula válida* (teorema) que la represente.

Demostración: Si $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \vdash_S P$ es la deducción de *P*, se aplica el *teorema de la deducción* sucesivamente hasta que el conjunto de premisas sea vacío. Se obtiene así la siguiente cadena de fórmulas que tiene como último elemento un teorema:

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}\} \vdash_S (Q_n \rightarrow P)$$

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}\} \vdash_S (Q_{n-1} \rightarrow (Q_n \rightarrow P))$$

$$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-3}\} \vdash_S ((Q_{n-2} \rightarrow (Q_{n-1} \rightarrow (Q_n \rightarrow P)))$$

$$\vdash_S (Q_1 \rightarrow (Q_2 \rightarrow (Q_3 \rightarrow (\ldots \rightarrow (Q_n \rightarrow P))\ldots))$$

Ejemplo

Supongamos las proposiciones: *p= como demasiado* y *q= me duele el estómago y* la argumentación que se quiere demostrar es:

$$\vdash_S ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$$

El teorema de la deducción implica que, en un sistema de pruebas, demostrar lo anterior es equivalente a demostrar la deducción:

$$\{(p \rightarrow q)\} \vdash_S (\neg q \rightarrow \neg p)$$

O también:

$$\{(p \rightarrow q), \neg q\} \vdash_S \neg p$$

Esta última deducción se lee "*si como demasiado me duele el estómago y si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado*".

- El sistema deductivo que vamos a estudiar está basado en el *Sistema deductivo de Gentzen.*

- Antes debemos definir:

  - Una *subdeducción,* informalmente, es la derivación de una conclusión *Q* a partir de una *premisa auxiliar* (o hipótesis) *P*, dentro del proceso de una deducción (la demostración madre o principal).

  - Después de obtener la conclusión buscada en la subdeducción, se remueve la subdeducción de la demostración madre y se sustituye por el resultado $P \vdash Q$.

  - Para representar subdeducciónes usaremos la *notación de Fitting*. Esta notación emplea rectángulos, llamados *cajas*, en la primera fila de una caja se pone la premisa auxiliar *P*, mientras en la última fila se encuentra la conclusión Q.

Ejemplo de subdeducción usando la *notación de Fitting*

1. P_1 (Premisa)
2. P_2 (Premisa)
3. $\vdash P_2$ (R1(1): regla R1 aplicada a P_2)
4. R_1 (Premisa auxiliar)
5. $\vdash R_2$ (R2(2,4): regla R2 aplicada a P_2 y R_1)
6. $\vdash R_3$ (R3(5): regla R3 aplicada a R_2)
7. $\vdash P_4$ (R4(4,6): regla R4 aplicada a la subdeducción)

- El *Sistema de Deducción Natural (DN)* fue propuesto por Gerald Gentzen en 1934.

- Se basa en deducciones y tiene varias reglas de inferencia y ningún axioma.

- Las reglas de inferencia son dos para cada conectivo lógico del alfabeto:
  - una de *introducción* del conectivo.
  - una de *eliminación* del conectivo.

- Permiten hacer suposiciones adicionales (abrir líneas argumentales adicionales) que cuando se cierran, aportan algo al flujo argumental principal.

⌘ Formalmente el *Sistema de Deducción Natural* se define como:

$$S = (A, F, X, R)$$

1- El alfabeto de símbolos: **A= { p_i, ¬, →, ∧ , ∨ (,) }**

- Símbolos de proposiciones p1, p2, p3…. (p, q, r, s, t, . . .)
- Símbolos de conectivos ¬, ∧, ∨, →
- Símbolos de paréntesis (,).

2- El conjunto de ***fórmulas bien formadas*** (*fbf*) ***F***:

- Las variables proposicionales son *fbfs*.
- Si *P* es una *fbf*, entonces (¬*P*) es una *fbf.*
- Si *P, Q* son *fbfs*, entonces (*P* ∧ *Q*), (*P* ∨ *Q*), (*P*→*Q*) y (*P*← *Q*) son *fbfs*.

⌘ Toda *fbf* se obtiene mediante las tres reglas anteriores

NOTA: En adelante usaremos el conectivo bicondicional entre dos fórmulas $(P \leftrightarrow Q)$. Este conectivo se entenderá como una forma abreviada de la fórmula bien formada $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

3- El conjunto de ***Axiomas, X,*** es vacío.

4- El conjunto de ***reglas de deducción*** (o de inferencia) ***R,*** está compuesto por las reglas de ***introducción*** y de ***eliminación*** para cada conectivo.

(I∧) Introducción de la conjunción.
(I∨) Introducción de la disyunción.
(I¬) Introducción de la negación.
(I→) Introducción de la implicación.

(E∧) Eliminación de la conjunción.
(E∨) Eliminación de la disyunción.
(E¬) Eliminación de la negación.
(E→) Eliminación de la implicación.

4- Conjunto ***R*** de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$**)** Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P,Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

Ejemplos:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{hoy es viernes}\\\textit{son las cinco}\end{array}}{\textit{hoy es viernes y son las cinco}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}(p \rightarrow q)\\(r \vee \neg p)\end{array}}{((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))}$$

4- Conjunto ***R*** de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$**)** Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P,Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

Ejemplos:

n	$(p \rightarrow q)$	
m	$(r \vee \neg p)$	
k	$((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))$	$I \wedge n,m$
i	$((r \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow q))$	$I \wedge m,n$
j	$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q))$	$I \wedge n,n$

4- Conjunto ***R*** de reglas de inferencia se describen a continuación:

$I \wedge$) Regla de ***introducción de la conjunción:***

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{(P \wedge Q)}$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$$\{P,Q\} \vdash (P \wedge Q)$$

$E \wedge$) Regla de ***eliminación de la conjunción:***

$$\frac{(P \wedge Q)}{P} \qquad \frac{(P \wedge Q)}{Q}$$

De la conjunción de dos fórmulas se deducen *las dos fórmulas*.

Ejemplo:

$\{(P \wedge Q)\} \vdash P$ (eliminación derecha)

$\{(P \wedge Q)\} \vdash Q$ (eliminación izquierda)

$$\frac{((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p))}{(p \rightarrow q)}$$

Ejemplo:

Usemos las dos reglas definidas para demostrar:

$$\{(p \wedge (q \wedge r))\} \vdash (p \wedge r)$$

1) $(p \wedge (q \wedge r))$ (Premisa)

n) $(p \wedge r)$

Comenzamos escribiendo la premisa y, dejando un espacio vacío, escribimos la conclusión.

- Construir la prueba consiste en llenar la brecha entre las premisas y la conclusión, aplicando la secuencia adecuada de reglas de inferencia.

Ejemplo:

Demostrar usando sólo las dos reglas anteriores:

$$\{(p \wedge (q \wedge r))\} \vdash (p \wedge r)$$

1) $(p \wedge (q \wedge r))$ (Premisa)
2) p (E∧(1))
3) $(q \wedge r)$ (E∧(1))
4) r (E∧(3))
5) $(p \wedge r)$ (I∧(2,4))

1) $(p \wedge (q \wedge r))$
2) $\vdash p$
3) $\vdash (q \wedge r)$
4) $\vdash r$
5) $\vdash (p \wedge r)$

$I\neg$) Regla de ***introducción de la negación:***

$$\frac{\begin{array}{c}(P \rightarrow Q)\\(P \rightarrow \neg Q)\end{array}}{\neg P} \qquad \frac{\begin{array}{c}P\\(Q \wedge \neg Q)\end{array}}{\neg P}$$

Esta regla se usa en ***demostraciones por reducción al absurdo*** de la validez de una fórmula $\neg P$

$$\{(P \rightarrow Q),(P \rightarrow \neg Q)\} \vdash \neg P$$

1. Se introduce la premisa auxiliar P .
2. Si de esta premisa podemos deducir la validez de una contradicción $(Q \wedge \neg Q)$, entonces podemos armar la validez de $\neg P$.

$I\neg$**)** Regla de ***introducción de la negación:*** Con la notación de *Fitting* (***I¬***) se representa como:

$$\boxed{\begin{array}{ll} P & (\text{Premisa auxiliar}) \\ \vdots & \\ & \\ (Q \wedge \neg Q) & \end{array}}$$
$$\neg P$$

$E\neg$**)** Regla de ***eliminación de la doble negación:***

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Esta regla es bien conocida.

$I \rightarrow$) Regla de ***introducción de la implicación:***

Para definir esta regla:

1. Se introduce la premisa auxiliar P .
2. Si se demuestra que de P se deduce una fórmula Q, entonces se ha demostrado la validez de $(P \rightarrow Q)$.

P (Premisa auxiliar)

$\vdots$

Q

$(P \rightarrow Q)$

Esta regla es una versión del ***Teorema de la Deducción***

- Lo que se deduce a partir de P, en el ámbito de su caja, se *garantiza verdadero* en tanto que P lo sea, entonces $(P \rightarrow Q)$ también lo es.

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

$E \rightarrow$) Regla de ***eliminación de la implicación:***

$$\frac{\begin{array}{c}(P \rightarrow Q)\\ P\end{array}}{Q}$$

Esta regla tiene nombre propio, es mejor conocida como *Modus Ponens*

$$\{(P \rightarrow Q), P\} \vdash Q$$

Ejemplos:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{si presiono entonces se rompe}\\ \textit{presiono}\end{array}}{\textit{se rompe}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow R))\\ (P \vee Q)\end{array}}{(P \rightarrow R)}$$

Ejemplos:

Para demostrar $\{(P \to Q), \neg Q\} \vdash \neg P$ podemos escribir la siguiente deducción:

1) $(P \to Q)$ (Premisa)
2) $\neg Q$ (Premisa)
3) P (Premisa auxiliar)
4) Q (E → 1, 3)
5) $\neg Q$
6) $(Q \land \neg Q)$ (I ∧ 5, 2)
7) $\neg P$ (I ¬ 3, 6)

$I \vee$) Regla de ***introducción de la disyunción:***

$$\frac{P}{(P \vee Q)} \qquad \frac{Q}{(P \vee Q)}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir *de cada una de ellas*.

$\{P\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción derecha)

$\{Q\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción izquierda)

Ejemplos:

$$\frac{llueve}{lueve\ o\ hay\ viento}$$

$$\frac{(p \to q)}{(p \to q) \vee (r \to \neg p))}$$

$$\frac{(p \to q)}{((r \to \neg p) \vee (p \to q))}$$

$I\ \vee$) Regla de ***introducción de la disyunción:***

$$\frac{P}{(P \vee Q)} \qquad \frac{Q}{(P \vee Q)}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir *de cada una de ellas*.

$\{P\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción derecha)

$\{Q\} \vdash (P \vee Q)$ (introducción izquierda)

$E\ \vee$) Regla de ***eliminación de la disyunción:***

$$\frac{\begin{array}{c}(P \vee Q)\\(P \to R)\\(Q \to R)\end{array}}{R}$$

Esta regla se usa en el método de *demostración por casos.*

$$\{(P \vee Q),(P \to R),(Q \to R)\} \vdash R$$

$E\ \vee$**)** Regla de ***eliminación de la disyunción:*** Esta regla se usa en el método de ***demostración por casos***, que se aplica cuando se quiere demostrar una deducción del tipo $(P \vee Q) \vdash R$.

1. Se introducen las premisas auxiliares P y Q.
2. Usando las dos premisas auxiliares se intentan demostrar dos subdeducciones independientes con igual conclusión, R.

$$P \vdash R \qquad\qquad Q \vdash R$$

$$P \to R \qquad\qquad Q \to R$$

3. Si se ha completado el paso anterior, se usan las subdeducciones obtenidas en la deducción madre y se obtiene que

$$\{(P \vee Q),(P \to R),(Q \to R)\} \vdash R$$

$E\vee$) Regla de ***eliminación de la disyunción:*** con la notación de *Fitting* (***E∨***) se representa como:

$(P \vee Q)$ (Premisa)

P (Premisa auxiliar)	Q (Premisa auxiliar)
$\vdots$	$\vdots$
R	R
$\boxed{P \to R}$	$\boxed{Q \to R}$

R

⌘ En este caso, de la disyunción $(P \vee Q)$ se deduce R, con el auxilio de los dos *argumentos opcionales* mencionados: P y Q

$E\vee$) Regla de ***eliminación de la disyunción:*** con la notación de *Fitting* (***E∨***) se representa como:

$(P \vee Q)$ (Premisa)

P (Premisa auxiliar)	Q (Premisa auxiliar)
$\vdots$	$\vdots$
R	R

R

- En este caso, de la disyunción $(P \vee Q)$ se deduce R, con el auxilio de los dos *argumentos opcionales* mencionados: P y Q

El sistema de Gentzen está ahora completamente definido.

Ejemplos:

Demostrar la propiedad distributiva de la conjunción.

$$\{(p \wedge (q \vee r))\} \vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

1) $(p \wedge (q \vee r))$ (Premisa)
2) p (E∧ (1))
3) $(q \vee r)$ (E∧ (1))

4) q (Premisa aux.)
5) $(p \wedge q)$ (I∧(2,4))
6) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (I∨(5))

7) r (Premisa aux.)
8) $(p \wedge r)$ (I∧(2,7))
9) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (I∨(8))

10) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (E∨(3,6,9))

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $\{P\} \vdash (Q \rightarrow P)$ puede hacerse usando la introducción de la implicación:

1) P	Premisa
2) Q	Premisa auxiliar
3) P	1
4) $(Q \rightarrow P)$	I→ 2, 3

Para demostrar $\vdash (p \rightarrow (p \vee q)$ puede hacerse:

1) p	Premisa auxiliar
2) $(p \vee q)$	Iv 1
3) $(p \rightarrow (p \vee q))$	I→ 1, 2

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $((p \wedge q) \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$:

1) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ premisa

2) p premisa auxiliar

3) q premisa auxiliar

4) $(p \wedge q)$ I∧ 2, 3

5) r E→ 1

6) $(q \rightarrow r)$ I→ 3, 5

7) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ I→ 2, 6

Ejemplos:

Demostrar a validez de la fórmula $\{(P \to Q),(P \to (Q \to R))\} \vdash (P \to R)$:

1)	$(P \to Q)$	Premisa
2)	$(P \to (Q \to R))$	Premisa
3)	P	Premisa auxiliar
4)	Q	E $\to$ 1, 3
5)	$(Q \to R)$	E $\to$ 2, 3
6)	R	E $\to$ 5, 4
7)	$(P \to R)$	I $\to$ 3, 6

Cosas Incorrectas:

- Vamos a ver algunas operaciones que NO pueden realizarse durante una deducción utilizando el sistema de *DN*.

- **No podemos *suponer premisas auxiliares* que *contradigan* fórmulas ya demostradas, en pasos anteriores, o premisas dadas**.

Ejemplo:

1)	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	premisa
2)	$(p \wedge q)$	premisa
3)	r	E$\rightarrow$ 1,2
4)	$\neg r$	premisa auxiliar

Cosas Incorrectas:

⌘ **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

Ejemplo:

1) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ premisa
2) p premisa

auxiliar

3) q premisa

auxiliar

4) $(p \wedge q)$ I∧ 2, 3
5) r E→ 1
6) $(q \rightarrow r)$ I→ 3, 5
7) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ I→ 2, 6

Cosas Incorrectas:

⌘ **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

Ejemplo:

1) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ premisa

2) p premisa

auxiliar

3) q premisa

auxiliar

4) $(p \wedge q)$ I∧ 2, 3

5) r E→ 1

6) $(q \rightarrow r)$ I→ 3, 5

7) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ I→ 2, 6

Cosas Incorrectas:

- **Si se está dentro de una *sub demostración* sólo se pueden usar fórmulas que están en la *sub demostración o en sus ancestros*.**

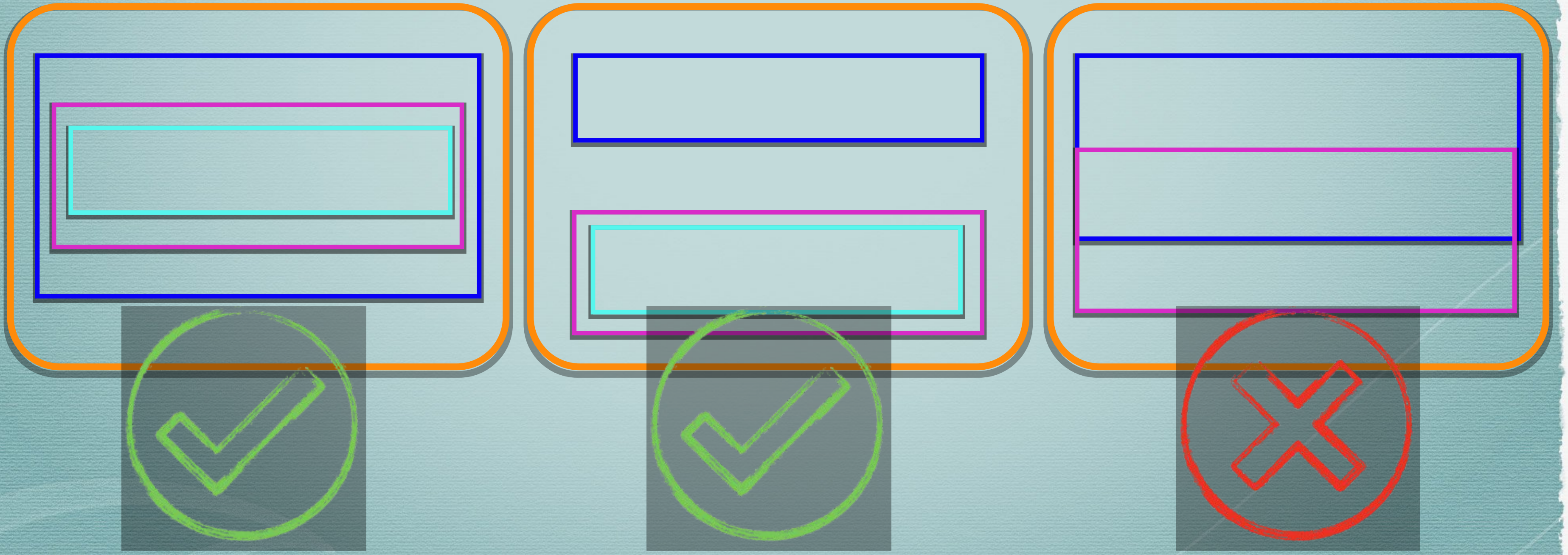
Ejemplo:

1)	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	premisa
2)	p	premisa
auxiliar		
3)	q	premisa
auxiliar		
4)	$(p \wedge q)$	I∧ 2, 3
5)	r	E→ 1
6)	$(q \rightarrow r)$	I→ 3, 5
7)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	I→ 2, 6

Cosas Incorrectas:

- **NO se pueden *solapar* cajas de *Fitting*.**

Ejemplo:



Cosas Incorrectas:

- **No se puede acabar la deducción *dentro de una sub demostración*. La última línea debe estar fuera de todas las cajas de *Fitting*.**

Ejemplo: Se quiere demostrar $\vdash (P \wedge Q)$

1)	P	premisa auxiliar
2)	Q	premisa auxiliar
3)	$(P \wedge Q)$	I∧ 2, 3

- En este caso, lo que está *dentro* de la sub demostración solo se cumple si se cumple la hipótesis o suposición, pero NO *siempre*.

Cosas Incorrectas:

- **No se puede saltar pasos.**

Ejemplo: Se quiere escribir la negación de $\neg P$, no podemos poner directamente *P.*

1)	$\neg P$	
	⋮	
i)	contradicción	
i+1)	P	

1)	$\neg P$	
	⋮	
i)	contradicción	
i+1)	$\neg\neg P$	I¬ *1,i*
i+2)	P	E¬ *i*+1

- **No se puede pasar de $\neg(P \vee Q)$ a $(\neg P \wedge \neg Q)$ *en un solo paso*, pues no hay ninguna regla que lo permita.**

- Como en cualquier otro sistema deductivo, *la obtención de teoremas define nuevas reglas*, que reciben el nombre de ***reglas derivadas***.

- Estas reglas pueden usarse en cualquier momento, como si fueran parte de sistema.

- Por ejemplo, lo demostrado anteriormente: $\{(P \to Q), \neg Q\} \vdash \neg P$

1)	$(P \to Q)$	(Premisa)
2)	$\neg Q$	(Premisa)
3)	P	(Premisa auxiliar)
4)	Q	(E → 1, 3)
5)	$(Q \land \neg Q)$	(I ∧ 4, 2)
6)	$\neg P$	(I ¬ 3, 5)

Se conoce como la regla del ***Modus Tollens***

- Esta derivación se puede producir en cualquier punto de un argumento, no es necesario que las dos primeras fórmulas sean las premisas.

- De hecho, si desde un cierto punto del argumento se pueden utilizar dos fórmulas como la $(P \to Q)$ y la $\neg Q$ (estén donde estén, mientras sean formalmente accesibles), ya se sabe que se puede derivar la fórmula $\neg P$, repitiendo exactamente esos pasos.

- Entonces, en una demostración, solo se utiliza como una regla más del sistema justificándola como ***regla derivada (RD)*** y su nombre (si tuviera), en este caso: ***Modus Tollens***.

$$\frac{\begin{array}{c}(P \to Q) \\ \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

Regla del ***Modus Tollens***

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

- De la misma forma se pueden deducir la regla del ***Silogismo Hipotético,*** que podremos usar como regla derivada.

$$\frac{\begin{array}{c}(P \to Q)\\(Q \to R)\end{array}}{(P \to R)}$$

Regla del ***SH***

- La regla de ***ECQ*** (*Ex contradictione quodlibet*), la cual nos dice que de una contradicción es posible deducir cualquier cosa. Es decir, si en el curso de una demostración somos capaces de encontrarnos con una contradicción (*A* y ¬*A*), entonces en la línea siguiente podemos poner *cualquier fbf*.

$$\frac{\begin{array}{c}P\\\neg P\end{array}}{R} \qquad \frac{(P \wedge \neg P)}{R}$$

Regla ***ECQ***

Ejemplo:

$$\frac{\begin{array}{c}(p \to q)\\\neg(p \to q)\end{array}}{(p \vee (r \to \neg p))}$$

- Otra regla que se considera entre las derivadas es la ***PBC*** (*Proof by Absurdity*) es decir la regla de *reducción al absurdo*.

- Esta regla consiste en considerar a la *negación* de la fórmula que se quiere demostrar, como *premisa auxiliar* y desde allí llegar a una *contradicción*.

$$\frac{\begin{array}{c}\neg P \\ (Q \wedge \neg Q)\end{array}}{P}$$

Ejemplo: $\{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), \neg R\} \vdash \neg(P \wedge Q)$

1) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ (Premisa)
2) $\neg R$ (Premisa)
3) $\neg\neg(P \wedge Q)$ (Premisa auxiliar)
4) $(P \wedge Q)$ (E ¬ 3)
5) P (E ∧ 4)
6) $(Q \rightarrow R)$ (E→ 1,5)
7) Q (E ∧ 4)
8) R (E→6, 7)
9) $(R \wedge \neg R)$ (I ∧ 2, 8)
10) $\neg(P \wedge Q)$ (PBC 3,9)

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.

- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.

- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.

$\{P,Q\} \vdash (\neg Q \rightarrow \neg P)$ podemos pasar a $\{P\} \vdash (Q \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P))$

$\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P))$ podemos pasar a $\{(P \rightarrow Q)\} \vdash (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.
- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.
- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.
- Además, si se puede demostrar una equivalencia, por ejemplo: $(P \to Q) \equiv (\neg P \vee Q)$, podemos asegurar que :

$$(P \to Q) \vdash (\neg P \vee Q) \quad \text{y además} \quad (\neg P \vee Q) \vdash (P \to Q)$$

- Esto es algo que también puede usarse en una demostración o en una deducción.

Conclusiones:

- Aplicar la *DN* para obtener una derivación, se trata de un proceso en el que hay que encontrar la regla más adecuada para una expresión o conjunto de expresiones.
- Cualquier deducción demostrada puede usarse en otra deducción como ***regla derivada***.
- Podemos usar el ***Teorema de la Deducción***.
- Además, si se puede demostrar una equivalencia, por ejemplo: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$, podemos asegurar que :

$$(P \rightarrow Q) \vdash (\neg P \vee Q) \quad \text{y además} \quad (\neg P \vee Q) \vdash (P \rightarrow Q)$$

Pero NO SIRVE para demostrar que una suposición es *inválida*

Conclusiones:

⌘ Una fórmula *P* es ***deducible*** a partir de *T*, *T* ⊆ **Form**, si existe una deducción de *P* a partir de *T*.

P es una *deducción* de *T* y se denota: $\boxed{T \vdash P}$

Si $T = \emptyset$

P es un *teorema* y se denota: $\boxed{\emptyset \vdash P}$ $\boxed{\vdash P}$

⌘ El conjunto de las fórmulas *deducibles* a partir de *T* ⊆ **Form** será denotado por *Ded*(*T*).

Observación: *Ded* (Ø) es el conjunto de los *Teoremas*

Lógica Proposicional Sistemas Deductivos

- El método de los *Árboles de Refutación* que estudiamos, tiene una estructura *completamente sintáctica* y, por tanto, se puede considerar como un sistema de demostración sintáctico, y es indirecto.

- Los *Árboles de Refutación* permiten demostrar teoremas y hacer deducciones.

- Una *deducción* de una fórmula *P* a partir de un conjunto de fórmulas *T* es un *Árbol de Refutación cerrado* de:

  - Una conjunción de fórmulas de *T* con Ø P

    Q_1 Ù Q_2 Ù ... Ù Q_n Ù Ø P

  - Ø P en el caso en que *T* = Ø

⌘ Sea T un conjunto finito de fórmulas:

- Si $T = \emptyset$ entonces $P \in \mathrm{Con}(T)$ si sólo si la fórmula $\neg P$ tiene un *Árbol de Refutación cerrado*.

$$\emptyset \vdash P$$

- Si $T = \{ Q_1, \ldots, Q_n\}$ entonces $P \in \mathrm{Con}(T)$ si sólo si

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \wedge \neg P$$

tiene un *Árbol de Refutación cerrado*.

$$T \vdash P$$

Para todo conjunto finito de fórmulas T

$$\mathrm{Con}(T) = \mathrm{Ded}(T)$$

Relación entre semántica y sintaxis

- Es posible demostrar que estos sistemas axiomáticos son equivalentes a la teoría interpretativa.

- Se puede verificar que una fórmula proposicional es una tautología en la teoría interpretativa si y sólo si es una fórmula válida en la teoría de la demostración.

- Teorema de la Corrección:

Todo teorema en el sistema deductivo DN es una Tautología

- Teorema de la Adecuación:

Si P es una fbf y es una tautología, entonces P es un teorema en sistema deductivo DN

Relación entre semántica y sintaxis

- Si la secuencia $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = P$ es una deducción de P a partir del conjunto T ($T \vdash P$), se dice que la conclusión es ***consecuencia lógica*** del conjunto de las premisas y se escribe:

$$T \vDash P$$

- Observar que la demostración de un teorema es una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.

$$\varnothing \vdash P$$

- Por lo tanto, si *P* es *consecuencia lógica* del conjunto vacío, se puede asegurar que *P* es *tautología*.

$$\varnothing \vDash P$$

Relación entre semántica y sintaxis

- Sabemos que *P* es un teorema si:

$$\varnothing \vdash P$$

Entonces $P \in$ Ded($\varnothing$)

$$\boxed{\text{Ded }(\varnothing\text{) = Con}(\varnothing\text{)}}$$

- Además que *P* es una tautología si:

$$\varnothing \models P$$

Entonces $P \in$ Con($\varnothing$)

Todo Teorema es una Tautología

Toda Tautología es un Teorema

Completitud, Corrección y Decidibilidad

- Para cualquier sistema axiomático es imprescindible estudiar si éste cumple las tres propiedades de *completitud*, *corrección* y *decidibilidad*.

- Completitud: un sistema de demostración es *completo* si es capaz de demostrar cualquier fórmula que sea una tautología y deducir cualquier consecuencia lógica.

El sistema de DN y los AR son completos

- Corrección: un sistema de demostración es *correcto* (consistente, coherente) si todas las fórmulas demostrables en él son tautologías y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

El sistema de DN y los AR son correctos

Completitud, Corrección y Decidibilidad

- Decidibilidad: un sistema de demostración es *decidible* si proporciona un procedimiento aplicable a cualquier fórmula y que termine, que permita decidir si una fórmula es tautología o es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas.

- Las Tablas de Verdad, los Árboles de Refutación y las demostraciones en el *SN* son métodos efectivos y finitos que permiten determinar si una fórmula es tautología o consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas.

La Lógica Proposicional es decidible

Preguntas .....

CONCEPTOS IMPORTANTES

- **Sistema Deductivo**: definición y tipos (directo, indirecto)
- **Axioma**: definición y características (compatibles, independientes y suficientes)
- **Sistema de Demostración Formal**: Componentes (alfabeto, reglas de sintaxis, axiomas, reglas de deducción)
- **Demostración**: definición - Teorema: definición
- **Deducción**: definición - Teorema de la deducción - Diferencia entre demostración y deducción
- **Sistema deductivo de Gentzen** (Deducción Natural): Subdeducción - Notación de Fitting - definición formal de DN - Reglas de deducción (I^, E^, I¬, E¬, I->, E->, Iv, Ev)
- **Operaciones incorrectas en una DN**
- **Reglas Derivadas**: MT, SH, ECQ, PBC
- **Relación entre semántica y sintaxis**
- **Completitud, Corrección, Decidibilidad**