Lógica Proposicional

2. Semántica de la Lógica Proposicional

La formalización de una proposición del lenguaje natural en una fórmula es solo el primer paso para analizar un razonamiento; Nótese que cuando una proposición se traduce al lenguaje simbólico, lo que queda es su "estructura lógica", que puede ser común a varias proposiciones diferentes. Esto nos permite analizar las formas de razonamiento, ya que un razonamiento tiene que ver con la estructura lógica de las proposiciones de la argumentación y no con su significado en el lenguaje natural. Hasta el momento hemos considerado las fórmulas como meras listas de símbolos, construidas a partir de un alfabeto mediante ciertas reglas bien determinadas. Este aspecto de la Lógica Proposicional es denominado *aspecto sintáctico*.

Sin embargo hay otro aspecto a considerar, pensemos en las reglas para efectuar operaciones aritméticas que nos enseñaron en la escuela. Se aprende en forma mecánica cómo representar cantidades, considerando los números escritos en el sistema decimal, cómo unir esos números en una expresión, qué operadores (+, -, *, /, etc.) debemos usar y cómo para representar la acción que nos interesa. Todo esto corresponde al aspecto sintáctico de la matemática. Cuando se quiere resolver un problema, los números son *interpretados* como valores de mercaderías, longitudes, volúmenes, alturas, etc. Es decir, a las listas de cifras de la notación decimal les atribuimos un significado concreto; lo mismo hacemos con los símbolos +, -, *, / para obtener así la solución al problema planteado. Éste es el aspecto semántico de la matemática.

Del mismo modo, se deben *interpretar* las fórmulas; esta interpretación no tiene nada que ver con lo que expresan las proposiciones a partir de las cuales se obtuvieron esas fórmulas. Como se dijo anteriormente, cuando estudiamos el comportamiento de las fórmulas lo hacemos teniendo en cuenta la *estructura lógica* de la misma, olvidándonos de lo que cada proposición pudo expresar en lenguaje natural. Así, cuando hablamos de interpretar una fórmula, o darle "significado" nos referimos a analizar las fórmulas en relación con su *verdad* o *falsedad*, ya que el significado de una fórmula está dado por su valor de verdad. Este nuevo punto de vista corresponde al *aspecto semántico* de la lógica proposicional.

Entonces, se sabe que una proposición simple puede tener uno de los dos valores de verdad *verdadero* o *falso*. Sin importar la expresión que represente, estamos seguros que la proposición tomará si o si uno de esos dos valores; esto se fundamenta en el *principio de bivalencia*, según el cual, todo enunciado es verdadero o falso, pero nunca ambas cosas a la vez. Si consideramos la variable proposicional p_0, podemos expresar que esta puede tomar solo uno de dos valores de verdad, de la siguiente manera:

p_0
$\top$
$\bot$

Donde el símbolo $\top$ representando el valor *"verdadero"* y el símbolo $\bot$ representando el valor *"falso"*.

El valor de verdad de una proposición compuesta, en cambio, depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la conforman, y de los conectivos proposicionales que participen en ella.

Comenzaremos entonces por interpretar los conectivos proposicionales para luego poder interpretar las fórmulas compuestas; vimos que el símbolo $\vee$ representa a la disyunción o al *"o"* del lenguaje natural; el símbolo $\wedge$ representa a la conjunción, o al *"y"*; el $\rightarrow$ representa al condicional, o el *"si ... entonces..."*; y por último, el símbolo $\neg$ representa la negación o el *"no"* del lenguaje natural. El significado de cada uno será representado por una tabla en la que nuevamente, aparece el símbolo $\top$ representando el valor *verdadero* y el símbolo $\perp$ representando el valor *falso*.

Estos conectivos funcionan como los operadores en matemáticas, de acuerdo a los valores de verdad de las proposiciones que cada conectivo relacione, será el valor de verdad asignado a la proposición compuesta resultante. Este comportamiento de los conectivos proposicionales con respecto a los valores de verdad es el habitual en matemática y se remonta por lo menos al siglo IV A.C. [1]. Entonces, el comportamiento de los conectivos con respecto a los valores de verdad, se puede resumir en las siguientes tablas:

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

a)

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

b)

$\rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

c)

$\neg$	
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

d)

En las mismas, la primer fila y la primer columna contienen los valores de verdad que puede tomar cada proposición, y en la intersección de cada una se encuentra el valor de verdad que tomará la proposición compuesta en ese caso. Analizando cada una de las tablas, puede observarse que en la tabla a), que representa el conectivo $\wedge$, (la conjunción), aparece una sola vez el verdadero ($\top$) en las intersecciones fila-columna; es decir, para que una conjunción sea verdadera *ambas* proposiciones deben ser verdaderas, en otro caso será falsa.

La tabla b) representa el conectivo $\vee$, la disyunción, y muestra que la proposición compuesta solo será falsa cuando ambas proposiciones lo sean: *falso o falso* ocasiona un *falso*. Esta tabla representa lo que en castellano sería, dadas dos opciones A o B, elegimos "A o B o ambas", es el llamado **o inclusivo**. Coloquialmente, en castellano cuando se usa para decir por ejemplo " vamos al cine o al teatro" la disyunción se toma de otra manera, que es "A o B pero no ambas", es decir vamos al cine pero NO al teatro o viceversa; esta forma de usar la disyunción es el llamado **o exclusivo** y es representada por otra fórmula (se sugiere al lector encontrarla).

De la tabla d) resulta que el $\neg$, la negación, es el único conectivo que se aplica a una sola fórmula y su significado es cambiar el valor de verdad de la proposición que éste precede: cuando la proposición que sigue a $\neg$ es *falsa*, el valor de verdad de la nueva proposición será *verdadero*, y si la proposición es *verdadera* su negación será *falsa*.

La tabla c), del conectivo $\rightarrow$ el condicional, no parece tan intuitiva en algunos casos. Sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, lo cual intuitivamente no resulta problemático. Si se analiza la proposición "*si Paula estudia, aprobará el examen*" en este caso, si Paula estudia se espera que apruebe, y cuando eso *no* sucede (estudia pero no aprueba), resulta natural pensar que la proposición analizada "mentía", o sea era *falsa*. Pero la tabla nos dice que si el antecedente es

[1] Cuando fue especificada por los filósofos griegos de la escuela estoica, en especial Crisipo

falso (Paula no estudia), sin importar el valor de verdad del consecuente, la proposición compuesta es *verdadera*. Hay que recordar que un condicional no expresa un hecho actualmente existente del mundo, sino que establece una condición que, si se cumpliera podría garantizar que algo pasara. Esto no quita que si no se cumple esa condición, el consecuente pueda ser verdadero, ya que Paula puede aprobar sin haber estudiado, pero seguirá siendo verdad que si hubiera estudiado, aprobaría.

El condicional podría verse como un contrato, pensemos por ejemplo en la proposición "si llueve te presto mi paraguas" el único caso en que sería mentira es si lloviera y yo no prestara mi paraguas. En cualquier otro caso el contrato se mantiene, porque si hay sol y no presto el paraguas, no estaba mintiendo ya que dije que lo prestaría solo si llovía (antecedente falso-consecuente falso); y si hay sol y presto mi paraguas el contrato tampoco se rompe (antecedente falso-consecuente verdadero).

Formalmente, Indicaremos con $\mathbf{B}$ al conjunto $\{\bot, \top\}$; si se define en $\mathbf{B}$ el orden total $\bot < \top$, y se consideran las operaciones binarias $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y la operación unaria $\neg$, según las tablas anteriores, se mantienen las siguientes relaciones, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbf{B}$:

$$x \vee y = \text{máx}\{x, y\} \tag{1}$$
$$x \wedge y = \text{mín}\{x, y\} \tag{2}$$
$$x \rightarrow y = \text{máx}\{\neg x, y\} \tag{3}$$
$$x \vee \neg x = \top \tag{4}$$
$$x \wedge \neg x = \bot \tag{5}$$

A continuación se especifica cómo interpretar las fórmulas definidas por el lenguaje; en el caso particular de la lógica proposicional, una interpretación consiste en una función, llamada *valuación*, que le asigna a cada fórmula un valor de verdad: verdadero o falso.

Definición 1 *Sean P y Q fórmulas arbitrarias, decimos que una **valuación booleana**, o simplemente **valuación**, es cualquier función $v : \mathbf{Form} \longmapsto \mathbf{B}$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

(V1) $v(\neg P) = \neg v(P)$

(V2) $v(P \vee Q) = v(P) \vee v(Q)$

(V3) $v(P \wedge Q) = v(P) \wedge v(Q)$

(V4) $v(P \rightarrow Q) = v(P) \rightarrow v(Q)$

Notar que las valuaciones le asignan a cada fórmula un valor de verdad, pero no de cualquier modo, lo hacen respetando el significado de los conectivos proposicionales. De aquí resulta (y es un buen ejercicio detenerse un instante a pensarlo) que fijada una valuación a las variables proposicionales, las listas de símbolos que llamamos fórmulas pueden interpretarse como un conjunto de enunciados (algunos verdaderos, algunos falsos) sujetos a las operaciones lógicas usuales.

Una pregunta importante, directamente ligada a la expresividad del lenguaje formal que hemos definido, es la de si habrá "pocas" o "muchas" valuaciones.

Si nuestro lenguaje pretende representar combinaciones de conjuntos arbitrarios de proposiciones, sería conveniente que hubiera "muchas" valuaciones: por lo menos debería haber una para cada asignación posible de valores de verdad a las variables proposicionales. Afortunadamente esto es lo que ocurre, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea f una función cualquiera del conjunto* $\mathbf{Var}$ *de variables proposicionales en* $\mathbf{B}$, $f : \mathbf{Var} \longmapsto \mathbf{B}$. *Entonces existe una única valuación v_f* $: \mathbf{Form} \longmapsto \mathbf{B}$ *que extiende a f; es decir, tal que $v_f(p_n) = f(p_n)$ para toda variable proposicional p_n.*

Demostración: Definiremos la valuación v_f por inducción en el grado de complejidad de las fórmulas (ver la Definición 8 del apunte del *Lenguaje de la Lógica Proposicional*). Si P es una fórmula tal que $comp(P) = 0$, no hay conectivos lógicos en P, entonces por **(i)** del Corolario 1 (apunte del *Lenguaje de la Lógica Proposicional*), P es una variable proposicional, entonces existe un n tal que $P = p_n$. Definimos $v_f(P) = v_f(p_n) = f(p_n)$.

Sea ahora $comp(P) = m \geq 1$. Como hipótesis inductiva, supongamos que hemos definido v_f para toda fórmula de grado de complejidad estrictamente menor que m.

Si P es una fórmula tal que $comp(P) = m$, entonces por **(ii)** del Corolario 1 (apunte del *Lenguaje de la Lógica Proposicional*) se puede presentar uno y sólo uno de los siguientes casos:

(1) Existe una única fórmula Q tal que $P = \neg Q$

(2) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \vee R)$

(3) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \wedge R)$

(4) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \to R)$

En el caso **(1)**, $comp(Q) = m - 1 < m$, y por la hipótesis inductiva, está definida $v_f(Q)$. Definimos $v_f(P) = \neg v_f(Q)$.

En los casos **(2)**, **(3)** y **(4)** se tiene que $comp(Q) < comp(P)$ y $comp(R) < comp(P)$, luego por la hipótesis inductiva están unívocamente definidos los valores $v_f(Q)$ y $v_f(R)$. En el caso **(2)**, definimos $v_f(P) = v_f(Q) \ \vee \ v_f(R)$; en el caso **(3)**, será $v_f(P) = v_f(Q) \ \wedge \ v_f(R)$; y en el caso **(4)**, $v_f(P) = v_f(Q) \to v_f(R)$.

De esta forma definimos unívocamente el valor $v_f(P)$ para toda fórmula de grado de complejidad m.

Obtuvimos así una función $v_f : \mathbf{Form} \longmapsto \mathbf{B}$ y de la definición resulta obviamente que esta función v_f es una valuación y que $v_f(p_n) = f(p_n)$ para toda la variable p_n.

Para terminar la demostración, sólo queda probar que la v_f que acabamos de definir es la *única* valuación que extiende a la función f.

Esto lo haremos por el absurdo: supongamos que hay otra valuación que extiende a f, digamos w, y consideremos el siguiente conjunto I en el cual están las fórmulas P para las cuales el valor de verdad de $v_f(P)$ coincide con el valor de verdad de $w(P)$.

$$I = \{P \in \mathbf{Form}/v_f(P) = w(P)\}.$$

Como w también extiende a f, I contiene todas las variables proposicionales, y como v_f y w son ambas valuaciones, es fácil ver que I es cerrado por los conectivos. Luego por el Teorema 1 (del apunte del *Lenguaje de la Lógica Proposicional*) resulta que todas las fórmulas pertenecen I; es decir **Form** $\subseteq$ **I**, por lo tanto $v_f(P) = w(P)$ para toda fórmula $P \in$ **Form**, c.q.d. ■

Observación 1: La construcción anterior nos permite obtener todas las posibles valuaciones. En efecto, si consideramos que $v : \mathbf{Form} \longmapsto \mathbf{B}$ es una valuación cualquiera y llamamos f a la restricción de v a **Var** (es decir, $f : \mathbf{Var} \longmapsto \mathbf{B}$ está definida por $f(p_n) = v(p_n)$ para todo n), por el teorema anterior sabemos que existe una valuación v_f que extiende a f y resulta de la unicidad que $v = v_f$.

El siguiente resultado nos será útil más adelante:

Corolario 1 *Fijemos n variables proposicionales distintas, que denotaremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para cada n-upla $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{B^n}$, existe una valuación $v_{\overline{a}}$ tal que $v_{\overline{a}}(x_1) = a_1$, $v_{\overline{a}}(x_2) = a_2$, ..., $v_{\overline{a}}(x_n) = a_n$.*

Demostración Consideremos una función $f : \mathbf{Var} \longmapsto \mathbf{B}$ tal que $f(x_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Sea p_k una variable cualquiera tal que $p_k \in$ **Var**, se puede definir f del modo siguiente:

$$f(p_k) = \begin{cases} a_i & \text{si } p_k = x_i \\ \bot & \text{si } p_k \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \end{cases}$$

Por el Teorema 1 sabemos que existe una valuación, v_f que extiende a f y satisface que $v_f(x_i) = f(x_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n$, luego podemos tomar $v_{\overline{a}} = v_f$, c.q.d. ■

Este teorema nos asegura que con una función que asigne valores de verdad a sólo un conjunto de variables proposicionales, en particular al conjunto de variables que participan en la fórmula que se está analizando, es suficiente para obtener la valuación de dicha fórmula.

Como ya se mencionó, la noción de valuación nos permite determinar el valor de verdad de todas las fórmulas de nuestro lenguaje, y teniendo en cuenta esto se pueden diferenciar a las fórmulas en las siguientes tres clases:

Definición 2 *Diremos que una fórmula P de la lógica proposicional es una **tautología** si $v(P) = \top$ para toda valuación v. Diremos que P es una **contradicción** (o una **falsedad**) si $v(P) = \bot$ para toda valuación v. Además diremos que P es una **contingencia** si existen algunas valuaciones v tal que $v(P) = \top$ y existen algunas valuaciones v tal que $v(P) = \bot$; es decir que P no es ni una tautología ni una contradicción.*

Las tautologías son aquellas fórmulas que son verdaderas por la configuración de sus símbolos, independientemente de la valuación que se considere; se corresponden con las “verdades lógicas”. Son proposiciones que son verdaderas independientemente de lo que pase en el mundo, por lo cual no dan información sobre la realidad empírica.

Por ejemplo: $(p_0 \vee \neg\, p_0)$, es una tautología. Supongamos que p_0 representara a la proposición “el banco es azul ”, en ese caso la fórmula representa a la proposición compuesta “el banco es azul o el banco no es azul ", es claro que esa proposición será siempre verdadera, sin importar el banco que se considere, porque si el banco es azul es verdadera la proposición p_0, y si el banco que se considera no es azul, la proposición verdadera es la $\neg\, p_0$, por lo tanto, si consideramos la tabla del conectivo $\vee$, vemos que la fórmula completa será verdadera cualquiera sea el banco que se considere. Es claro que, aunque no se sepa qué proposición representa p_0, como una variable proposicional puede tomar uno de dos valores de verdad, $v(p_0)$ puede ser $\top$ o $\bot$, y la negación cambiará el valor que esta tome a $\bot$ o $\top$ en cada caso, siempre alguna de las dos en $(p_0 \vee \neg\, p_0)$ será verdadera, por lo que la fórmula completa lo será. Si se reemplazara p_0 por cualquier otra fórmula P el resultado sería el mismo.

Otro ejemplo, no tan obvio, es el siguiente. Sea P una fórmula de la forma:

$$(((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \rightarrow p_2)))$$

donde p_0, p_1, p_2 denotan variables proposicionales cualesquiera. Si P no fuese una tautología debería existir una valuación v tal que $v(P) = \bot$. Como P es de la forma $(Q \rightarrow R)$, con $Q = ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$ y $R = ((p_0 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \rightarrow p_2))$ de acuerdo con la condición **(V4)** de la definición de valuación, debería ser:

(a) $v((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) = \top$ y

(b) $v((p_0 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \rightarrow p_2)) = \bot$

Para que se cumpla la igualdad **(b)** vemos, por la propiedad **(V2)**, que ambas deben ser falsas, es decir, $v(p_0 \rightarrow p_2) = \bot$ y $v(p_1 \rightarrow p_2) = \bot$ y de aquí, usando otra vez la propiedad **(V4)**, concluimos que $v(p_0) = v(p_1) = \top$, y que $v(p_2) = \bot$. Pero entonces, en **(a)** $v((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) = (\top \wedge \top) \rightarrow \bot = \bot$, lo que contradice lo que habíamos supuesto. Por lo tanto no hay una valuación v que haga que $v(P) = \bot$, o sea que para toda valuación $v(P) = \top$.

Del mismo modo, las contradicciones o falsedades son las fórmulas que son falsas por su configuración. Por ejemplo: $P = (p_0 \wedge \neg p_0)$, sin importar la proposición que represente p_0, es fácil ver que si afirmo que ambas se cumplen me estoy contradiciendo y por lo tanto esta afirmación debe ser falsa. Por otro lado, solo analizando la tabla de cómo se comporta el conectivo $\wedge$ se ve que la fórmula P nunca será verdadera.

De todo esto, resulta claro notar que una fórmula P es una *contradicción* si y sólo si su negación $\neg P$ es una *tautología*.

En contraposición con estos dos casos, el valor de verdad de las contingencias depende de la valuación que se considere. Este tipo de fórmulas no son necesariamente verdaderas o necesariamente falsas, sino que su verdad o falsedad es relativa, depende del significado de cada proposición. Por ejemplo, si

$$P = ((p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow (p_2 \wedge p_1))$$

para una valuación v que considere a $v(p_1)$ y a $v(p_2)$ verdaderas, $v(P)$ resultará verdadera; y para una valuación v que considere falsa a $v(p_1)$ y verdadera a $v(p_2)$, $v(P)$ resultará falsa. Queda como ejercicio verificar lo dicho.

Las contingencias se corresponden con los enunciados que realmente interesan en un contexto dado; esto es, aquellos cuyo valor de verdad no está determinado trivialmente y proporciona algún conocimiento sobre el universo ya que su valor de verdad cambia dependiendo de la situación real.

En los ejemplos anteriores, para calcular $v(P)$ usamos las propiedades **(V1)** – **(V4)** para poder aplicar la valuación v directamente a las variables proposicionales que figuran en P, obteniendo así elementos de $\mathbf{B}$. Luego se consideran los símbolos de conectivos que representan operaciones entre valores de $\mathbf{B}$, los cuales tienen su correspondiente definición en las tablas de descriptas anteriormente, para finalmente obtener $v(P)$. Formalizaremos este procedimiento en el próximo teorema.

Antes conviene introducir la siguiente notación: Para toda fórmula P, $var(P)$ denotará el conjunto de las variables proposicionales que figuran en P, con $var(P) \subseteq$ **Var**.

Teorema 2 *Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan variables proposicionales distintas y que P es una fórmula tal que $var(P) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para toda valuación v, el siguiente procedimiento nos permite calcular el valor $v(P)$, conociendo los valores $v(x_1), \ldots, v(x_n)$:*

> *Sustituir en la expresión de P cada una de la variables x_i por $v(x_i)$, y evaluar la expresión así obtenida en B, utilizando las tablas que interpretan los conectivos binarios y el conectivo unario, según corresponda.*
>
> *El resultado obtenido es $v(P)$.*

Demostración: Por inducción en el grado de complejidad de P.

Si $comp(P) = 0$, entonces P debe ser una variable proposicional; esto es $P = x_i$ para algún $1 \leq i \leq n$, y $v(P) = v(x_i) \in \mathbf{B}$.

Como hipótesis inductiva, supondremos que el procedimiento indicado: sustituir cada variable que aparece en la fórmula por su valuación y operar con los conectivos que figuran en la misma, nos da el valor $v(S)$ para toda fórmula S tal que $var(S) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $comp(S) < m$.

Sea la $comp(P) = m > 0$, por el Corolario 1 (del apunte del *Lenguaje de la Lógica Proposicional*), sabemos que se puede presentar uno y sólo uno de los siguientes casos:

(1) Existe una única fórmula Q tal que $P = \neg\, Q$

(2) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \vee R)$

(3) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \wedge R)$

(4) Existe un único par de fórmulas Q, R tal que $P = (Q \rightarrow R)$

Observemos que en todos los casos se tiene que $comp(Q) < comp(P)$ y que $comp(R) < comp(P)$. Además, en el caso **(1)**, $var(Q) = var(P)$, y en los casos **(2)**, **(3)** y **(4)** $var(Q) \cup var(R) = var(P)$. Luego en todos los casos se tiene que $var(Q) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $var(R) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Sustituir cada una de las variables x_i que figuren en P por el valor $v(x_i)$ significa hacer estas sustituciones en Q y en R. Luego, por la hipótesis inductiva, al efectuar estas sustituciones obtenemos los valores $v(Q)$ y $v(R)$.

Para completar la demostración, basta observar que de las propiedades **(V1)** – **(V4)** que deben cumplir las funciones de valuación, resulta que $v(P)$ se obtiene de los valores $v(Q)$ y $v(R)$ considerando los conectivos como las respectivas operaciones en $\mathbf{B}$, c.q.d. ■

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior:

Corolario 2 *Sea P una fórmula tal que $var(P) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si v y w son dos valuaciones tales que $v(x_i) = w(x_i)$ para $1 \leq i \leq n$ entonces $v(P) = w(P)$.*

Resulta de este corolario que dos valuaciones pueden asignar diferentes valores de verdad a una fórmula P solamente si asignan diferentes valores de verdad a alguna de las variables proposicionales que intervienen en la escritura de P.

Un tópico importante de la lógica proposicional es el de encontrar métodos que permitan determinar, de una manera sistemática y en una cantidad finita de pasos (de modo que puedan implementarse en una computadora), si una fórmula dada es o no es una tautología. La importancia de este problema va mucho más allá de la lógica, como se verá más adelante.

En principio, el problema de determinar si una fórmula dada es o no es una tautología involucra a todas las valuaciones, y éstas forman en sí un conjunto infinito. Veremos, sin embargo, que se trata de un problema esencialmente finito: para cada fórmula P, basta estudiar sólo una cantidad finita, bien determinada, de posibilidades.

Sea P una fórmula y supongamos que sus variables proposicionales son $x_1, x_2, \dots, x_n$; esto es, $var(P) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Por el Corolario 1, para cada n-upla $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B^n}$ hay una valuación $v_{\overline{a}}$ tal que $v_{\overline{a}}(x_i) = a_i$, para $1 \leq i \leq n$.

De acuerdo con el Teorema 2, $v_{\overline{a}}(P)$ se calcula sustituyendo en P las variables x_i por los valores a_i y efectuando las operaciones correspondientes a los conectivos.

Si listamos ahora todas las n-uplas $\overline{a} \in \mathbf{B^n}$, y a la derecha de cada una de ellas escribimos el valor $v_{\overline{a}}(P)$, obtenemos una tabla o matriz, de 2^n filas y $n+1$ columnas, formadas por elementos de $\mathbf{B}$.

Por ejemplo, la Tabla 1 corresponde a $P = ((p_0 \vee p_7) \to p_9)$ con $x_1 = p_0$, $x_2 = p_7$ y $x_3 = p_9$.

x_1	x_2	x_3	$v_{\overline{a}}(P)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tabla 1: Tabla de verdad de $((p_0 \vee p_7) \to p_9)$.

La tabla que acabamos de describir se llama *Tabla de verdad de la fórmula P*, y nos permite conocer el valor $v(P)$ para cualquier valuación v.

En efecto, sea v una valuación cualquiera y consideremos la n-upla $\overline{a} = (v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_n))$. Supongamos que esta n-upla corresponde a los n primeros lugares de la fila i-ésima. Por el Corolario 2, se obtiene el valor de verdad de P para esa valuación, $v(P) = v_{\overline{a}}(P)$, y este valor es el que figura en la última columna de dicha fila; esto es, en la intersección de la fila i y la columna $n+1$, el lugar $(i, n+1)$

de la tabla.

Tenemos entonces un primer método para determinar si una fórmula P dada es o no es una tautología: escribimos su tabla de verdad y miramos la última columna de la misma: P es una tautología si y sólo si en esta columna figura únicamente el símbolo $\top$. Si en cambio, en esta última columna figura solamente el símbolo $\perp$, se puede asegurar que P es una contradicción o falsedad; y si en ella figuran tanto símbolos $\top$ como símbolos $\perp$ (ambos), estamos en presencia de una contingencia.

Recordemos que los n primeros elementos de cada fila de la tabla de una fórmula P tal que $var(P) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ están en correspondencia con las funciones de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en $\mathbf{B}$. Por lo tanto, dos filas distintas no pueden tener sus primeros n elementos iguales: si $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ y $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ son dos filas distintas de la tabla de verdad de P, debe existir al menos un $i \leq n$ tal que $a_i \neq b_i$.

De esta observación resulta que la tabla de la verdad de una fórmula P en la que figuran n variables proposicionales distintas puede considerarse como una función $T_P : \mathbf{B^n} \longmapsto \mathbf{B}$.

En efecto, para toda n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{B^n}$, en la tabla de verdad de P hay una única fila cuyos primeros n elementos coinciden con los de esta n-upla, y si a_{n+1} es el elemento que figura en la columna $n+1$ de dicha fila, podemos definir sin ambigüedad $T_P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1}$.

Por ejemplo, si $P = ((p_0 \vee p_7) \rightarrow p_9)$ de la tabla anterior resulta que $T_P(\perp, \top, \perp) = \perp$ y $T_P(\top, \perp, \perp) = \perp$.

A cada fórmula P de la lógica proposicional tal que $var(P) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, le podemos hacer corresponder una función T_P de $\mathbf{B^n}$ en $\mathbf{B}$. Esta función está caracterizada por la siguiente propiedad:

(TV) $T_P(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) = v(P)$

Las funciones de $\mathbf{B^n}$ en $\mathbf{B}$ se llaman *funciones booleanas de n variables*.

Los resultados anteriores muestran que podemos asociar con cada fórmula proposicional una función booleana. Una pregunta que se plantea naturalmente es si vale la recíproca; es decir, si dada una función booleana $f : \mathbf{B^n} \longmapsto \mathbf{B}$, existe una fórmula P tal que $T_P = f$.

La respuesta es afirmativa como lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 3 *Sea n un número natural tal que $n \geq 1$ y sea f una función booleana de n variables. Entonces dadas n variables proposicionales distintas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se puede encontrar una fórmula P tal que $var(P) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $T_P = f$.*

Demostración: Lo haremos por inducción en el número n de variables de la función f.

Si $n = 1$ entonces tenemos una sola variable x_1, que puede tomar uno de dos valores posibles, y f es una función de $\mathbf{B} \longmapsto \mathbf{B}$. Pero hay exactamente cuatro funciones de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{B}$, que llamaremos g, h, j y k, que están dadas en la Tabla 2.

De esta tabla resulta inmediatamente que: $g = T_{x_1}$, $h = T_{\neg x_1}$, $j = T_{(x_1 \wedge \neg x_1)}$, $k = T_{(x_1 \vee \neg x_1)}$, con $P = x_1, \neg x_1, (x_1 \wedge \neg x_1)$ y $(x_1 \vee \neg x_1)$ en cada caso.

x_1	$g(x_1)$	$h(x_1)$	$j(x_1)$	$k(x_1)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$

Tabla 2: Funciones de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{B}$.

Por lo tanto hemos probado el teorema para el caso $n = 1$, es decir que para cada función f de una variable, representada por su correspondiente tabla, se puede encontrar una fórmula P tal que $T_P = f$.

Como hipótesis inductiva, supongamos que dadas n variables proposicionales distintas, toda función booleana de n variables es la tabla de verdad de una fórmula en la que figuran esas variables proposicionales.

Sea $f : \mathbf{B^{n+1}} \longmapsto \mathbf{B}$ una función booleana de $n + 1$ variables, trataremos de obtener la fórmula P que se corresponde con esa tabla. Entonces, para cada n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{B^n}$ se definen dos funciones cuya imagen coincide con la imagen de f para alguna de sus $n + 1$-uplas, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \perp) \ \ y \\ f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \top). \end{aligned}$$

Dado que las dos funciones definidas, f_0 y f_1, son de $\mathbf{B^n} \longmapsto \mathbf{B}$, por la hipótesis inductiva se sabe que hay dos fórmulas, digamos Q y R, tales que $var(Q) = var(R) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, y esas funciones son la tabla de verdad de cada una de esas fórmulas, es decir $f_0 = T_Q$ y $f_1 = T_R$.

Luego, se puede definir a P como

$$P = ((Q \wedge \neg x_{n+1}) \vee (R \wedge x_{n+1}))$$

Es claro que P tiene una variable más que Q y R, es decir $var(P) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Vamos a probar que $T_P = f$.

Para ello sea $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{B^{n+1}}$, y sea v una valuación tal que $v(x_i) = a_i$ para $1 \leq i \leq n + 1$. Por **(TV)** tenemos que:

$$T_P(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = v(P) = (v(Q) \wedge \neg v(x_{n+1})) \vee (v(R) \wedge v(x_{n+1})) \tag{6}$$

Si $a_{n+1} = \perp$, entonces $v(x_{n+1}) = \perp$ y se tiene que

$$v(P) = v(Q) = T_Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \perp) \tag{7}$$

Si $a_{n+1} = \top$, entonces $v(x_{n+1}) = \top$ y se tiene que

$$v(P) = v(R) = T_R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \top) \tag{8}$$

Como los únicos valores que puede tomar a_{n+1} son $\top$ y $\perp$, de las tres igualdades anteriores (6, 7, 8) resulta que:

$$T_P(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$$

Dado que el razonamiento anterior es válido para cualquiera que sea la (n+1)-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{B^{n+1}}$, hemos probado que $T_P = f$, c.q.d. ■

El método inductivo utilizado en la demostración del teorema anterior, nos da un procedimiento efectivo para encontrar una fórmula correspondiente a una función booleana. Ilustraremos este procedimiento con un ejemplo.

Sea $f : \mathbf{B^3} \longmapsto \mathbf{B}$, la función dada por la Tabla 3:

a_1	a_2	a_3	$f(a_1, a_2, a_3)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tabla 3: Función booleana de tres variables.

Queremos encontrar una fórmula P con tres variables proposicionales, digamos x, y y z tal que $f = T_P$. La idea (que es esencialmente la misma que usamos en la demostración del teorema anterior), es llegar a expresar a la función f como una combinación de funciones de una variable.

Entonce comenzamos reescribiendo la función de tres variables f, en función de dos funciones de dos variables, f_0 y f_1. Definimos $f_0(a_1, a_2) = f(a_1, a_2, \perp)$ y $f_1(a_1, a_2) = f(a_1, a_2, \top)$, se verifica fácilmente que:

$$f(a_1, a_2, a_3) = (f_0(a_1, a_2) \wedge \neg a_3) \vee (f_1(a_1, a_2) \wedge a_3) \tag{9}$$

Si continuamos el procedimiento, definiendo las funciones de una variable f_{00}, f_{01}, f_{10} y f_{11}.

$$f_{00}(a_1) = f_0(a_1, \perp) \text{ y } f_{01}(a_1) = f_0(a_1, \top)$$

$$f_{10}(a_1) = f_1(a_1, \perp) \text{ y } f_{11}(a_1) = f_1(a_1, \top)$$

obtenemos que

$$f_0(a_1, a_2) = (f_{00}(a_1) \wedge \neg a_2) \vee (f_{01}(a_1) \wedge a_2)$$

y que

$$f_1(a_1, a_2) = (f_{10}(a_1) \wedge \neg a_2) \vee (f_{11}(a_1) \wedge a_2)$$

Luego si reemplazamos f_0 y f_1 en (9) tenemos que:

$$f(a_1, a_2, a_3) = (((f_{00}(a_1) \wedge \neg a_2) \vee (f_{01}(a_1) \wedge a_2)) \wedge \neg a_3) \vee (((f_{10}(a_1) \wedge \neg a_2) \vee (f_{11}(a_1) \wedge a_2)) \wedge a_3)$$

Ahora se debe inspeccionar la tabla que define a f para encontrar las fórmulas que definan las funciones de una sola variable. Para esto debemos considerar las filas de la tabla en la que interviene esa variable. De esto resulta que $f_{00} = T_x$, $f_{01} = T_{(x \wedge \neg x)}$ y que $f_{10} = f_{11} = T_{(x \vee \neg x)}$. Finalmente, reemplazando cada función de una variable por la fórmula que su tabla representa, tenemos:

$$f(a_1, a_2, a_3) = (((a_1 \wedge \neg a_2) \vee ((a_1 \wedge \neg a_1) \wedge a_2)) \wedge \neg a_3) \vee ((((a_1 \vee \neg a_1) \wedge \neg a_2) \vee ((a_1 \vee \neg a_1) \wedge a_2)) \wedge a_3)$$

Podemos concluir entonces que, si $v(x) = a_1, v(y) = a_2$ y $v(z) = a_3$, f es la tabla de verdad de la fórmula P, con:

$$P = ((((x \wedge \neg y) \vee ((x \wedge \neg x) \wedge y)) \wedge \neg z) \vee ((((x \vee \neg x) \wedge \neg y) \vee ((x \vee \neg x) \wedge y)) \wedge z))$$

La fórmula P fue obtenida usando un procedimiento sistemático de reducción del número de variables.

Pero observemos que f es también la tabla de verdad de la fórmula $Q = ((x \vee z) \wedge (\neg y \vee z))$, y también de la fórmula $R = ((x \to y) \to z)$.

Esto muestra que puede suceder que fórmulas distintas construidas con las mismas variables, pueden tener la misma tabla de verdad. Intuitivamente, podríamos decir que estas fórmulas expresan lo mismo. Esta idea se formaliza en la siguiente definición:

Definición 3 *Las fórmulas P y Q se dicen **equivalentes**, y se escribe $P \equiv Q$, si para toda valuación v se tiene que $v(P) = v(Q)$.*

Es fácil verificar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las fórmulas; es decir, que se satisfacen las tres propiedades siguientes, donde P, Q y R denotan fórmulas arbitrarias:

Reflexiva: $P \equiv P$

Simétrica: $P \equiv Q$ entonces $Q \equiv P$

Transitiva: $P \equiv Q$ y $Q \equiv R$ entonces $P \equiv R$

Es claro que las fórmulas lógicamente equivalentes generan la misma función de verdad, lo cual da lugar al siguiente lema.

Lema 1 *Si $var(P) = var(Q)$, entonces $P \equiv Q$ si y sólo si tienen la misma tabla de verdad.*

Demostración: Supongamos que $var(P) = var(Q) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $T_P = T_Q$, entonces para toda valuación v se tiene que

$$v(P) = T_P(v(x_1), \ldots, v(x_n)) = T_Q(v(x_1), \ldots, v(x_n)) = v(Q)$$

y por lo tanto, por definición, $P \equiv Q$.

Supongamos ahora que $P \equiv Q$. Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{B^n}$ y sea v una valuación tal que $v(x_i) = a_i$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces tendremos que

$$T_P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = v(P) = v(Q) = T_Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Como $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{B^n}$ es arbitraria, esto significa que $T_P = T_Q$, c.q.d. ∎

Observación 2: La hipótesis que $var(P) = var(Q)$ es esencial para la validez del Lema 1. En efecto, consideremos las fórmulas $P = (p_0 \vee p_1)$ y $Q = (p_0 \vee p_2)$. Si v es una valuación tal que $v(p_0) = v(p_1) = \bot$ y $v(p_2) = \top$ (esta valuación existe por el Teorema 1), se tiene que $v(P) = \bot$ y $v(Q) = \top$.

Luego P no es equivalente a Q. Sin embargo, es fácil verificar que $T_P(a_1, a_2) = T_Q(a_1, a_2)$ para todo par $(a_1, a_2) \in \mathbf{B^2}$.

Con un conjunto finito de variables proposicionales $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se pueden construir infinitas fórmulas. Por ejemplo, ya vimos que usando sólo una variable x y sólo el conectivo $\neg$ se pueden obtener las fórmulas:

$$x, \neg x, \neg\neg x, \ldots, \neg \ldots \neg x, \ldots$$

Pero ¿cuántas de estas fórmulas son esencialmente distintas; es decir, no equivalentes? Algunos autores se refieren a este problema como el *poder de expresión de la lógica proposicional*.

La respuesta se obtiene fácilmente a partir del Lema 1: cada clase de equivalencia de fórmulas construidas a partir de las variables proposicionales (que suponemos distintas) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está determinada por una única función booleana y como por el Teorema 3 cada una de tales funciones proviene de una fórmula construida a partir de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables, vemos que hay una biyección entre las clases de equivalencias de las fórmulas construidas a partir de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y las funciones booleanas de n variables.

De estas consideraciones resulta inmediatamente que:

Teorema 4 *El número de clases de equivalencia de fórmulas que se pueden construir a partir de n variables proposicionales distintas es 2^{2^n}.*

El siguiente criterio de equivalencia de fórmulas es conceptualmente importante:

Teorema 5 *Las fórmulas P y Q son equivalentes si y sólo si $(P \to Q)$ y $(Q \to P)$ son ambas tautologías.*

Demostración: El teorema es una consecuencia inmediata de la siguiente propiedad: Para toda valuación v, $v(P) \leq v(Q)$ si y sólo si $v(P \to Q) = \top$; que a su vez resulta de la igualdad **(3)** vista al comienzo y de la tabla de la negación. ■

Ejemplos: de algunas equivalencias útiles.

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
2. $(P \to Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
3. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$
4. $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \equiv (P \leftrightarrow Q)$
5. $(P \wedge (Q \wedge R)) \equiv ((P \wedge Q) \wedge R)$
6. $\neg\, \neg P \equiv P$
7. $(P \vee (Q \vee R)) = ((P \vee Q) \vee R)$

□

2.1. Formas Normales

Se ha visto que para toda fórmula se puede construir una tabla de verdad, esa tabla de verdad es una representación gráfica de una *función booleana* cuyo número de argumentos es el número de variables proposicionales distintas que aparecen en la fórmula. Además con el Teorema 3 se demostró que dada una función booleana se puede obtener una fórmula asociada a la misma y se definió un procedimiento para hacerlo.

Ahora se mostrará otra manera de obtener una fórmula, asociada a una función de verdad dada, a partir de su tablas de verdad. Para ello es importante saber que:

Proposición 1 *Toda función de verdad, es la función de verdad determinada por una fórmula tal que todas las conectivas que figuran en ella están entre* $\neg$*,* $\wedge$ *y* $\vee$*.*

Demostración: Dada una función de n argumentos. Se va a construir una fórmula P a partir de las variables proposicionales $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Observar que si la función de verdad toma el valor $\perp$ para toda combinación de valores de verdad, entonces corresponde a cualquier contradicción, y la siguiente fórmula se corresponde con esa función:

$$((p_1 \wedge \neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n)$$

notar además que en ella sólo aparecen los conectivos $\wedge, \vee$ y $\neg$.

Supongamos que la función de verdad toma el valor $\top$ por lo menos una vez. Este método se basa en construir, para cada una de las 2^n combinaciones de valores de verdad, una fórmula que sea verdadera para esa combinación y falsa para todas las demás combinaciones. Por ejemplo, si $n = 3$, la fórmula $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$ es verdadera solamente para la combinación $\top \perp \perp$ de valores de verdad para p_1, p_2 y p_3 respectivamente, y $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$ es verdadera solamente para la combinación $\perp \perp \top$. Estas fórmulas especiales se llaman *conjunciones básicas*.

Dada una asignación de valores de verdad a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se pone p_i en la conjunción, si a p_i se le asigna el valor de verdad *verdadero*, $\top$, y se pone $\neg p_i$ en la conjunción si a p_i se le asigna $\perp$ como su valor de verdad, para $1 \leq i \leq n$.

Entonces para una asignación de valores de verdad dada, todos los miembros de la conjunción tendrán valores de verdad $\top$, y así la conjunción completa recibe el valor verdadero. De análoga manera para cualquier otra asignación de valores de verdad, al menos uno de los miembros de la conjunción recibirá el valor $\perp$, de modo que la conjunción total tomará el valor $\perp$.

Para demostrar la Proposición 1, consideraremos todas las combinaciones de n valores de verdad (filas de la tabla de verdad) para las cuales nuestra función de verdad arroja el valor $\top$. Se generan las conjunciones básicas, tomando estas combinaciones como los valores de verdad de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivamente. Definiendo finalmente P como la disjunción de todas las conjunciones básicas obtenidas siguiendo el procedimiento explicado anteriormente. Esta P es la fórmula requerida.

Para convencernos de ello asignaremos valores de verdad a $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si nuestra función de verdad aplicada a esta combinación arroja el valor $\top$, entonces la correspondiente conjunción básica está en P y toma el valor $\top$ para la asignaciones de valores de verdad en cuestión, así que P toma asimismo el valor $\top$.

Si nuestra función de verdad aplicada a esta combinación arroja el valor $\perp$, entonces la correspondiente conjunción básica no está incluida en P, y todas las demás conjunciones básicas incluidas en P toman el valor $\perp$ para la asignación de valores de verdad en cuestión, con lo cual P también toma el valor $\perp$.

Así pues para cualquier asignación de valores de verdad, el valor de verdad de P es el dado por la función de verdad representada por la tabla. ■

Para entender mejor esta demostración nos referiremos a un ejemplo.

Ejemplo:

Sea una función de verdad especificada a través de la siguiente tabla (se trata de una función de tres argumentos):

$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Las combinaciones de valores de verdad para las que la función arroja el valor $\top$ son : $\top\ \top\ \top$, $\top\ \top\ \perp$ y $\perp\ \perp\ \perp$ (fila 1, fila 2 y fila 8), por lo tanto las conjunciones básicas correspondientes son:

$$\begin{array}{l}(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)\\(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)\\(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)\end{array}$$

La fórmula construida siguiendo la demostración es:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

Esta fórmula corresponde a la función de verdad dada y su tabla de verdad coincide con la tabla dada. □

A las fórmulas en las que sólo participan los conectivos $\wedge, \vee$ y $\neg$ las llamaremos *restringidas*, por no utilizar la totalidad de los conectivos del lenguaje.

Corolario 3 *Toda fórmula que no sea contradicción es lógicamente equivalente a una fórmula restringida de la forma:*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

Siendo Q_{ij} una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Esta forma se llama ***forma normal disyuntiva****.*

Demostración: Sabemos que dos fórmulas con el mismo conjunto de variables proposicionales son lógicamente equivalentes si y sólo si corresponden a la misma función de verdad. Entonces, dada una fórmula P, obtenemos su tabla de verdad y la función de verdad que ésta define. Aplicamos entonces el método de la Proposición 1 para obtener una fórmula restringida Q correspondiente a dicha función de verdad, lo que asegura que sean $P \equiv Q$. ■

Observación: Notar que en la notación de la forma normal disyuntiva, n se corresponde con la cantidad de variables de la función, y m es la cantidad de valuaciones (filas) que hacen a la fórmula verdadera.

Corolario 4 *Toda fórmula que no sea tautología es lógicamente equivalente a una fórmula restringida de la forma:*

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

*siendo cada Q_{ij} una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Esta forma se llama **forma normal conjuntiva**.*

Demostración: Sea P una fórmula que no es tautología. Entonces $\neg P$ no es contradicción y por el Corolario 3 sabemos que es lógicamente equivalente a una fórmula en forma normal disyuntiva:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

Luego P es lógicamente equivalente a

$$\neg\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

y por las leyes de De Morgan, esto es lógicamente equivalente a

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} \neg Q_{ij}\right)\right)$$

Finalmente una fórmula equivalente a P, escrita en forma normal conjuntiva, se obtiene reemplazando en esta fórmula cada expresión de la forma $\neg\neg q$ por q. ■

Ejemplo: Encontrar una forma normal conjuntiva, lógicamente equivalente a:

$$P = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3)$$

Primeramente construimos una fórmula escrita en forma normal disyuntiva lógicamente equivalente a $\neg P$:

$\neg$	$((\neg$	p_1	$\vee$	$p_2)$	$\rightarrow$	$p_3)$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Las combinaciones que dan el valor $\top$ (columna del $\neg$) son $\top\top\bot$, $\bot\top\bot$ y $\bot\bot\bot$. Por lo tanto, una forma normal disyuntiva lógicamente equivalente es

$$Q = ((p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3))$$

Así pues, la fórmula dada Q es lógicamente equivalente a la negación de P; por lo tanto, por las leyes de De Morgan, P es lógicamente equivalente a

$$\neg\, Q = (\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3))$$

y también a

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg\neg p_3) \wedge (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg\neg p_3) \wedge (\neg\neg p_1 \vee \neg\neg p_2 \vee \neg\neg p_3))$$

y finalmente, reemplazando $\neg\neg\, p_i$ por p_i a

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3))$$

que está en forma normal conjuntiva. □

2.2. Conjunto Adecuado de Conectivos

Definición 4 *Un **conjunto adecuado de conectivos** es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una fórmula que contenga solamente conectivos del conjunto.*

Una de las consecuencias de la discusión anterior es que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, ya que cualquier fórmula puede ser escrita utilizando sólo esos conectivos lógicos, mediante los procedimientos descriptos en los Corolarios 3 y 4.

Proposición 2 *Los pares $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivos.*

Demostración: Para demostrar esto se debería mostrar que con cada par de conectivos que pertenecen a cada conjunto se puede expresar cualquiera de los conectivos que **no** aparecen en él. Encontrar las equivalencias queda como ejercicio. ■

A partir de los cuatro conectivos hay tres formas de elegir el par adecuado, ningún otro par es adecuado. Para aclarar esto se va a considerar primeramente un par de conectivos distintos de $\neg$, entonces la pregunta obvia sería: ¿puede expresarse una función de verdad que tome siempre el valor $\perp$ mediante una fórmula que use solamente ese par de conectivos? La respuesta es forzosamente negativa ya que dando a todas las variables que aparecen en la fórmula el valor $\top$, la fórmula total tomaría necesariamente el valor $\top$. No hay modo de que la fórmula, o una parte suya, tome el valor $\perp$ bajo esta asignación de valores de verdad. Así pues, ninguna fórmula en la que sólo figuren las conectivas $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ puede ser una contradicción. Por lo tanto, ningún subconjunto de este conjunto de conectivos puede ser adecuado.

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base el Apunte de *Cálculo Proposicional* del **Dr. Roberto Cignoli** de la Universidad de Buenos Aires, el libro *Lógica para informática* de **Claudia Pons, Ricardo Rosenfeld y Clara Smith** de Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La plata (UNLP), el Libro *Lógica para Matemáticos* de **A. Hamilton** de Editorial Paraninfo y notas de clase del *Curso de Lógica y Computación* dictado por el **Dr. Guillermo Martínez** en la Universidad Nacional de San Luis.